Занимательно! Познавательно!

А. Ф. Коликов, А. В. Коликов

Изобретательность в вычислениях

Дрофа

Занимательно! Познавательно!

А. Ф. Коликов, А. В. Коликов

Изобретательность в вычислениях

Дрофа
Москва · 2003

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
К60

Серия основана в 2002 году

Коликов А. Ф.

К60 Изобретательность в вычислениях / А. Ф. Коликов, А. В. Коликов. — М.: Дрофа, 2003. — 80 с.: ил. — (Познавательно! Занимательно!).

ISBN 5—7107—7356—5

В книге рассматриваются приемы вычислений, применявшиеся до появления калькуляторов, причем отобраны случаи, где можно проявить изобретательность и смекалку. Читателю предлагается самостоятельно применить каждый из приемов вычислений. Ко многим заданиям приводятся решения с подробным объяснением. Уделяется также внимание наипростейшим вычислительным средствам, которые может изготовить каждый.

Книга будет интересна учащимся 5—9 классов.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

Учебное издание

Серия «Познавательно! Занимательно!»

Коликов Алексей Филиппович, Коликов Алексей Валерьевич

ИЗОБРЕТАТЕЛЬНОСТЬ В ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Зав. редакцией *Г. Н. Хромова.* Редактор *И. В. Ермолаева*
Оформление *А. А. Шувалова.* Художник *С. В. Любаев*
Художественный редактор *А. А. Шувалова*
Технический редактор *И. В. Грибкова*
Компьютерная верстка *Ю. Е. Гогина*
Корректор *Г. И. Мосякина*

Изд. лиц. № 061622 от 07 10 97.

Подписано к печати 30.09.03. Формат 60×90 1/16. Бумага типографская. Гарнитура «Ньютон»
Печать офсетная. Усл. печ л. 5,0. Тираж 10 000 экз. Заказ № 3304

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу:
127018, Москва, Сущевский вал, 49. Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс. (095) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Магазин «Переплетные птицы» 127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1.
Тел.: (095) 912-45-76.

Московская обл., г. Коломна, Голутвин, ул Октябрьской революции, 366/2.
Тел.: (095) 741-59-76.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов в ФГУП ДПК Роспатента
142001, г Домодедово, Каширское шоссе, 4, корп 1

ISBN 5—7107—7356—5

Предисловие

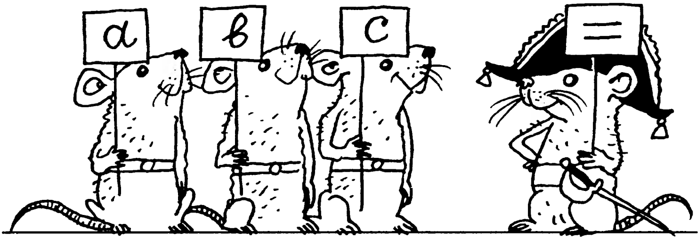
В нашу жизнь прочно вошел калькулятор. Да, он нам помогает быстро и надежно выполнять очень многие вычисления, позволяет не отвлекаться на запоминание промежуточных результатов, освобождает от знания табличных случаев вычислений. С одной стороны, это хорошо, так как мы избавляемся от многих рутинных операций но, с другой это лишает нас возможности развивать наблюдательность и память, т. е., как говорится, поработать головой. Наверное, наряду с применением современных вычислительных средств, в подходящих случаях было бы целесообразно, воспользоваться средствами и способами, которые применялись в прошлом.

В книге собраны задания, для решения которых можно проявить должную смекалку. Например, чтобы перемножить числа 19 875 и 8, казалось бы, непременно нужен калькулятор. Однако множимое можно округлить до 20 000, т. е. увеличить его на 125, но $125 \cdot 8 = 1000$. Итак, $19\,875 \cdot 8 = (20\,000 - 125) \cdot 8 = 20\,000 \cdot 8 - 125 \cdot 8 = 160\,000 - 1000 = 159\,000$.

Интерес и любознательность развиваются при изготовлении и применении простейших, давно известных вычислительных средств: таблиц, палочек Непера, счетов и т. п. Несомненно, такая работа ума и рук способствует развитию изобретательности.

Предлагаемая книга не претендует на всестороннее и полное освещение затрагиваемых вопросов. Ее цель — привлечь внимание читателей к простейшим вычислительным устройствам, и случаям вычислений, создающим возможность проявить творчество и смекалку.

Некоторые приемы вычислений



Если использовать понятие противоположного числа*, то вычитание можно рассматривать как прибавление числа, противоположного вычитаемому. Но тогда выражение, содержащее только сложение и вычитание чисел, принимает вид суммы некоторых чисел, и на нее становится возможным распространить действие переместительного и сочетательного законов сложения. В силу сочетательного закона можно один или несколько компонентов заменять им равнозначным выражением, а переместительный закон дает возможность менять порядок расположения компонентов, упрощая тем самым вычисления. Конечно, при выполнении всех этих операций надо строго учитывать изменения знаков членов выражения. Опираясь на общие свойства действий, при удачных комбинациях компонентов часто можно значительно упростить вычисления.

1.1. Сложение и вычитание целых чисел

1.1.1. Способ группировки с получением «круглых» чисел

1. Присмотритесь: нельзя ли слагаемые сгруппировать так, чтобы получились в сумме «круглые» числа? Закончите сложение. Обоснуйте эти вычисления.

---

* Отрицательным числом можно считать всякое вычитаемое ($a - b$; $-b$ — отрицательное число, если $b > 0$). Противоположным числом для некоторого числа будет то, которое в сумме с исходным дает 0 ($b + (-b) =$ $= 0$ или $b - b = 0$). Для числа b противоположным является число $-b$. На числовой прямой данное число b и противоположное ему число $-b$ располагаются от нуля на равном расстоянии, но по разные стороны.

53 624 + 4873 + 46 376 + 31 875 + 5127;
32 726 + 56 845 + 44 267 + 67 274 + 43 155 + 55 733;
458 036 + 234 562 + 71 523 + 541 964 + 765 438 + 928 477.

Составьте свои аналогичные выражения. Какими свойствами вы пользовались во всех этих случаях?

2. Присмотритесь: нельзя ли и здесь удачно сгруппировать слагаемые? Если нельзя, то попробуйте разбить слагаемые так, чтобы потом можно было удачно сгруппировать полученные числа.

74 587 + 6276 + 3745 + 25 436;
62 763 + 37 259 + 8678 + 11 345;
17 872 + 52 188 + 4768 + 5246.

Обоснуйте вычисления. Составьте свои аналогичные задания.

3. Как быстрее и с наименьшими трудностями найти суммы чисел? Как это обосновать?

а) 28 573 + 54 168 + 71 427 + 87 065 + 45 832 + 12 935;
17 468 + 47 573 + 36 945 + 82 532 + 52 427 + 63 055;
48 264 + 56 732 + 29 438 + 70 562 + 43 268 + 51 736;

б) 43 114 + 78 026 + 18 257 + 81 742 + 21 973 + 56 885;
126 574 + 348 467 + 524 093 + 873 425 + 651 532 + 475 906;
8736 + 6218 + 4324 + 1263 + 3781 + 5675 + 9090 + 909.

Составьте свои аналогичные задания.

1.1.2. Сложение и вычитание «по частям»

4. Выполните сложение, предварительно представив слагаемые дробными частями. Например,

468 236 + 175 587 + 532 413 + 825 764 = 468 000 + 236 + 175 000 + + 587 + 532 000 + 413 + 825 000 + 764 = (468 000 + 532 000) + + (175 000 + 825 000) + (236 + 764) + (587 + 413) = 2 002 000.

72 745 + 56 819 + 38 426 + 28 181 + 62 255 + 44 574;
47 238 + 29 607 + 75 386 + 52 393 + 70 614 + 24 762;
37 684 + 623 418 + 423 756 + 576 249;
638 + 137 + 225 + 788 + 86 + 126;
86 + 98 + 77 + 97 + 87 + 55;
15 062 + 24 723 + 27 938 + 32 277.

5. По всей видимости, и вычитание можно выполнять «по частям». Сделайте это.

2648 + 3734 – 4648;
35 276 + 14 823 – 45 276;
18 757 + 26 549 – 38 757.

1.1.3. Сложение и вычитание с округлением

В некоторых случаях вычисления можно упростить, если компоненты округлить, т. е. представить «круглыми» числами с последующей корректировкой (поправкой) данного выражения.

6. **а)** Например, 49 986 + 5335. Присмотритесь к первому слагаемому. Сколько единиц у него не достает до «круглого» числа? Но если первому слагаемому добавить сколько-то единиц (округлить слагаемое), то на столько же единиц увеличится вся сумма. Чтобы не допустить увеличения суммы, надо вычесть добавленное число.

$49\,986 + 5335 = 49\,986 + 14 - 14 + 5335 = 50\,000 + 5335 - 14 = 55\,321.$

б) Но для округления первого слагаемого недостающие единицы можно взять из второго слагаемого. Выполним округление и таким способом:

$49\,986 + 5335 = 49\,986 + 14 + 5321 = 50\,000 + 5321 = 55\,321.$

Выполните сложение, применяя оба способа.

7538 + 8987;	32 978 + 53 465;
46 989 + 3245;	17 369 + 2986.

7. Возможен способ округления сразу каждого слагаемого, а вычисление одной и той же суммы можно выполнить многими способами. Например,

$3975 + 5996 = 3975 + 25 - 25 + 5996 + 4 - 4 = 4000 + 6000 - 29 = 9971;$

$3975 + 5996 = 3975 + 25 - 25 + 5996 = 9996 - 25 = 9971;$

$3975 + 5996 = 3975 + 5996 + 4 - 4 = 9975 - 4 = 9971;$

$3975 + 5996 = 3975 + 25 + 5971 = 9971;$

$3975 + 5996 = 3971 + 5996 + 4 = 9971.$

Примените разные способы округления при вычислении сумм:

43 997 + 25 984;	15 979 + 8996;
6992 + 38 978;	8991 + 7985.

1.1.4. Прибавление и вычитание чисел вида $\underbrace{99...9}_{n-1 \text{ раз}}k$

8. Способ округления компонентов можно применить и в случае вычитания.

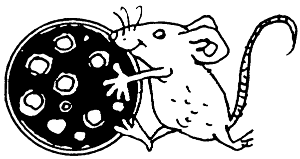
а) 6983 – 4798. Представьте уменьшаемое ближайшим «круглым» числом минус то, что добавлено при его округлении. Запишите получившееся выражение, завершите вычисления.

б) 6983 – 4798. Округлите не уменьшаемое, а вычитаемое. Как это отразится на значении разности? Какую надо сделать поправку? Выполните это вычисление.

в) 6983 – 4798. Нельзя ли округлить и уменьшаемое, и вычитаемое? Какие потребуются поправки? Выполните такое вычисление.

Примените эти способы округления при вычислении разностей:

25 995 – 3998;	316 985 – 299 987;
32 824 – 29 996;	64 978 – 53 986;
73 657 – 72 997;	273 975 – 72 998;
18 994 – 5997;	426 983 – 25 997.



9. **а)** К числам 367, 538, 439, 82 прибавьте 99. Сравните каждый полученный результат с исходным числом, к которому прибавляли 99. Как изменилось в каждом случае число сотен? А число единиц? Объясните, почему так получается. Составьте формальное правило прибавления числа 99. Проверьте свое правило на примерах, вычисляя одну и ту же сумму разными способами.

718 + 99;	265 + 99;	2864 + 99;
386 + 99;	724 + 99;	36 573 + 99.

Составьте свои такие суммы.

б) По этому же образцу составьте правила прибавления 9, 999, 99 999 и т. п. Проверьте свои правила, вычисляя одну и ту же сумму разными способами.

23 + 9;	728 + 999;	324 546 + 99 999;
47 + 9;	2875 + 999;	473 764 + 99 999;
568 + 9;	63 287 + 999;	27 329 + 99 999;
12 384 + 9;	56 468 + 999;	15 477 + 99 999.

в) Какие правила можно составить для прибавления чисел вида: $\underbrace{99...9}_{n-1 \text{ раз}}8$, $\underbrace{99...9}_{n-1 \text{ раз}}7$, $\underbrace{99...9}_{n-1 \text{ раз}}6$, ...?

10. По аналогии с заданием № 9 составьте правила вычитания чисел вида: $\underbrace{99...9}_{n \text{ раз}}$, $\underbrace{99...9}_{n-1 \text{ раз}}8$, $\underbrace{99...9}_{n-1 \text{ раз}}7$, ...

Примените эти правила при вычислении:

278 – 99;	2845 – 999;	415 736 – 9998;
486 – 99;	15 463 – 999;	56 845 – 9997;
724 – 99;	38 218 – 999;	213 564 – 9996;
1387 – 99;	5374 – 999;	124 453 – 9999.

1.2. Умножение и деление целых чисел

Если не касаться случаев умножения, а главное, случаев деления с нулем, то, используя понятие обратного числа*, деление всегда можно заменить умножением на число, обратное делителю, а поэтому выражение, содержащее только умножение и деление чисел, можно рассматривать как произведение, распространяя на него действие переместительного, сочетательного и распределительного законов умножения. Таким образом, отдельный компонент или их группу можно заменять равнозначным выражением или одним числом, а также в пределах произведения перемещать отдельные сомножители или некоторую их группу. При этих условиях и распределительный закон получает более широкое применение. В целом же многие вычисления значительно упрощаются, а иногда выполняются по формальным правилам.

1.2.1. Умножение и деление с округлением

11. Прием округления можно применить и в случае умножения.

Например, 498 • 8. Сколько единиц надо добавить к первому сомножителю, чтобы получилось ближайшее «круглое» число? Значит, 498 можно рассматривать как 500 без 2.

Итак, 498 • 8 = (500 – 2) • 8 = 500 • 8 – 2 • 8 = 4000 – 16 = 3984.

А можно округлить второй сомножитель.

Тогда 498 • 8 = 498 • (10 – 2) = 498 • 10 – 498 • 2 = 4980 – 996 = = 3984.

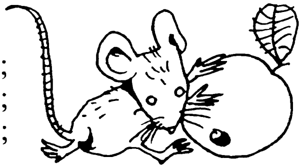
---

* Для данного числа a ($a \neq 0$) обратным числом будем считать $\frac{1}{a}$. Числа a и $\frac{1}{a}$ называют взаимообратными. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Можно округлить и оба сомножителя, но вряд ли это будет выгодно.

$498 \cdot 8 = (500 - 2) \cdot (10 - 2) = 500 \cdot 10 - 500 \cdot 2 - 10 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 3984.$

Примените прием округления:



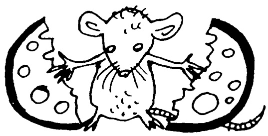
$297 \cdot 12$;	$875 \cdot 6$;	$288 \cdot 12$;
$695 \cdot 13$;	$687 \cdot 7$;	$473 \cdot 18$;
$3996 \cdot 7$;	$2993 \cdot 3$;	$637 \cdot 19$;
$4994 \cdot 14$;	$6875 \cdot 8$;	$324 \cdot 17$.

12. Прием округления можно иногда применить и в случае деления чисел.

Например, 6474 : 13. Сколько единиц недостает делимому до ближайшего «круглого» числа, которое легко бы делилось на 13? Значит, делимое можно представить как 6500 без 26.

Итак, $6474 : 13 = (6500 - 26) : 13 = 6500 : 13 - 26 : 13 = 500 - 2 = 498$.

Выполните деление, применив прием округления делимого:



7188 : 12;	8449 : 17;	9353 : 47;
8985 : 15;	8046 : 27;	7748 : 26;
7475 : 25;	8642 : 29;	9772 : 14;
7182 : 18;	7735 : 13;	7562 : 38;
9177 : 23;	7562 : 19;	9576 : 24.

1.2.2. Умножение и деление «по частям»

13. Иногда умножение чисел выгодно выполнить «по частям».

Например,

$31\,257 \cdot 8 = (30\,000 + 1250 + 7) \cdot 8 = 30\,000 \cdot 8 + 1250 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = 240\,000 + 10\,000 + 56 = 250\,056.$

При выполнении умножения помогает знание «хороших» произведений, например таких, как $2 \cdot 5 = 10$, $20 \cdot 5 = 100$, $4 \cdot 25 = 100$, $8 \cdot 125 = 1000$, $3 \cdot 37 = 111$. Эти произведения неплохо было бы запомнить.

Вычислите произведения, применяя этот прием:

$45\,127 \cdot 2$;	$16\,147 \cdot 5$;	$5636 \cdot 25$;
$23\,258 \cdot 4$;	$12\,515 \cdot 8$;	$7224 \cdot 125$;
$37\,746 \cdot 3$;	$1812 \cdot 37$;	$3248 \cdot 250$.

14. Прием вычисления «по частям» иногда можно применить и в случае деления чисел.

а) Например, 683 485 : 17. Присмотритесь к делимому. Нельзя ли его разбить на такие слагаемые, которые бы легко делились на 17?

Тогда 683 485 : 17 = (680 000 + 3400 + 85) : 17 = 680 000 : 17 + + 3400 : 17 + 85 : 17 = 40 205.

Выполните вычисления с помощью этого приема:

4235 : 7;	523 978 : 13;	543 672 : 18;
2715 : 3;	462 369 : 23;	573 895 : 19;
3216 : 4;	704 256 : 14;	516 344 : 172;
5436 : 6;	753 045 : 15;	848 636 : 212;
7256 : 8;	964 872 : 24;	642 963 : 321;
6345 : 9;	486 432 : 16;	724 543 : 181.

б) Прием деления «по частям» можно применить иногда и в том случае, когда эти части не сразу просматриваются.

Например, 66 456 : 8. Выделите наибольшее число тысяч, а потом сотен, которые бы делились на 8.

Тогда 66 456 : 8 = (64 тыс. + 24 сот. + 56) : 8 = 8 тыс. 3 сот. 7 = = 8307.

Выполните деление с помощью этого приема:

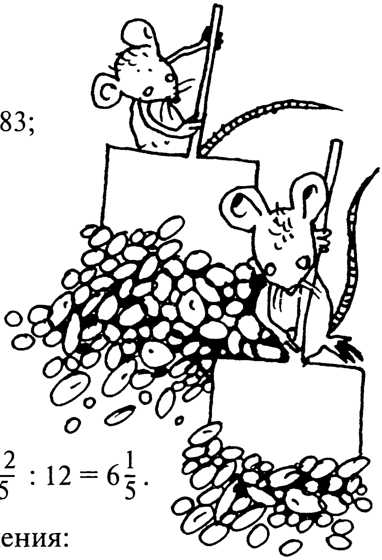
741 : 3;	29 348 : 4;	67 912 : 13;
834 : 6;	43 875 : 5;	37 656 : 9;
994 : 7;	38 472 : 12;	73 128 : 24.

1.3. Умножение и деление смешанного числа на целое число или на правильную дробь

Многие приемы вычислений с целыми числами применимы и к дробям, особенно это выгодно в случае умножения и деления смешанных чисел на целое число и на правильную дробь.

1.3.1. Умножение и деление «по частям»

15. Иногда нет надобности смешанные числа преобразовывать в неправильную дробь, а достаточно воспользоваться распределительным законом для соответствующих действий.



$$8\frac{5}{7}\cdot 21 = 8\cdot 21 + \frac{5}{7}\cdot 21 = 168 + 15 = 183;$$

$$24\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{3} = 24\cdot\frac{2}{3} + \frac{5\cdot 2}{8\cdot 3} = 16\frac{5}{12};$$

$$42\frac{3}{5} : 3 = 42 : 3 + \frac{3}{5} : 3 = 14\frac{1}{5};$$

$$56\frac{7}{11} : 14 = 56 : 14 + \frac{7}{11} : 14 = 4\frac{1}{22};$$

$$35\frac{3}{28} : \frac{5}{7} = 35 : \frac{5}{7} + \frac{3}{28} : \frac{5}{7} = 49\frac{3}{20};$$

$$74\frac{2}{5} : 12 = \left(72 + 2\frac{2}{5}\right) : 12 = 72 : 12 + \frac{12}{5} : 12 = 6\frac{1}{5}.$$

Выполните аналогичные вычисления:

$7\frac{2}{13}\cdot 26$; $48\frac{12}{17} : 6$; $7\frac{5}{9}\cdot 18$; $39\frac{13}{15} : 13$; $38\frac{4}{7} : 18$;

$15\frac{3}{4}\cdot 12$; $84\frac{7}{11} : 14$; $5\frac{2}{9}\cdot 18$; $48\frac{8}{9} : 12$; $52\frac{5}{12} : 17$;

$36\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9}$; $12\frac{5}{9} : \frac{2}{5}$; $45\frac{3}{16}\cdot\frac{8}{15}$; $22\frac{5}{33} : \frac{11}{18}$; $49\frac{7}{9} : 16$.

1.3.2. Умножение и деление с округлением

16. Иногда удобно преобразовать выражение так, чтобы первый компонент был ближайшим целым числом:

$$8\frac{15}{17}\cdot 6 = \left(9 - \frac{2}{17}\right)\cdot 6 = 9\cdot 6 - \frac{2}{17}\cdot 6 = 54 - \frac{12}{17} = 53\frac{5}{17};$$

$$17\frac{8}{11} : 9 = \left(18 - \frac{3}{11}\right) : 9 = 2 - \frac{1}{33} = 1\frac{32}{33};$$

$$35\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \left(36 - \frac{1}{4}\right) : \frac{2}{3} = 36 : \frac{2}{3} - \frac{1}{4} : \frac{2}{3} = 54 - \frac{3}{8} = 53\frac{5}{8}.$$

Вычислите:

$9\frac{23}{24}\cdot 12$; $14\frac{15}{16}\cdot 24$; $39\frac{15}{17}\cdot 34$; $124\frac{7}{8}\cdot 8$;

$47\frac{13}{19} : 6$; $35\frac{11}{14} : \frac{3}{4}$; $24\frac{8}{13} : \frac{5}{7}$; $55\frac{7}{8} : \frac{4}{7}$.

Заметим, что все рассмотренные вычислительные приемы применимы и к десятичным дробям.

17. Выполните соответствующие вычисления:

а) умножение и деление «по частям»:

$9{,}75 \cdot 8$; $8{,}37 \cdot 6$; $72{,}84 : 12$; $55{,}8 : 9$;

б) умножение и деление с округлением:

$24{,}8 \cdot 4$; $78{,}4 : 16$.

1.4. Возведение в квадрат

18. Особый интерес представляют некоторые частные приемы возведения чисел в квадрат.

а) Если целое число необходимо возвести в квадрат, достаточно к нему прибавить (или отнять) столько единиц, чтобы получить «круглое» число, и столько же вычесть (прибавить) из заданного числа. Полученные два числа перемножить и прибавить квадрат того числа, которое прибавляли (вычитали) для округления исходного числа.

Например:

$37^2 = (37 + 3) \cdot (37 - 3) + 3^2 = 40 \cdot 34 + 3^2 = 1369$;
$84^2 = (84 - 4) \cdot (84 + 4) + 4^2 = 80 \cdot 88 + 4^2 = 7056$.

Заметим, если возводимое целое число оканчивается цифрами 1, 2, 3, 7, 8, 9, то место нуля в произведении суммы на разность занимает квадрат того числа, что прибавляли и вычитали, он как бы приписывается к произведению без нуля.

Применяя этот прием последовательно несколько раз, можно возводить в квадрат также и трехзначные числа:

$$345^2 = (345 - 45) \cdot (345 + 45) + 45^2 = 300 \cdot 390 + (45 - 5) \cdot (45 + 5) + 5^2 = \\ = 117\,000 + 40 \cdot 50 + 25 = 119\,025.$$

Дайте обоснование этого факта.

Вычислите:

27^2; 83^2; 78^2;
36^2; 94^2; 567^2.

б) Рассмотренный прием особенно удобен при возведении в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся пятеркой. Тогда просто умножают число десятков на натуральное число, следующее за ним, и к полученному произведению приписывают 25.

Например, 75^2, число десятков — 7, а следующее за ним — 8, $7 \cdot 8 = 56$, приписываем 25, получаем $75^2 = 5625$. Обоснуйте это.

Вычислите квадраты всех двузначных чисел, заканчивающихся цифрой 5.

в) Если двузначное число более 40, но менее 50, то при возведении его в квадрат достаточно к цифре единиц прибавить 15 и к полученному результату приписать квадрат дополнения его единиц до 10, представляя квадрат этого дополнения в виде двузначного числа: $1^2 = 01$; $2^2 = 04$; $3^2 = 09$.

Например, 43^2. Цифра единиц 3, $3 + 15 = 18$, квадрат дополнения $(10 - 3)^2 = 49$. Получаем $43^2 = 1849$. Обоснуйте этот прием.

Вычислите квадраты всех чисел четвертого десятка.

г) Если двузначное число больше 50, но меньше 60, то при возведении его в квадрат достаточно к числу единиц прибавить 25 и к полученному результату приписать квадрат цифры его единиц, придавая этому квадрату вид двузначного числа.

Например, 52^2. Цифра единиц 2, $2 + 25 = 27$, квадрат цифры единиц $2^2 = 04$. Имеем: $52^2 = 2704$. Обоснуйте этот прием.

Вычислите квадраты всех чисел пятого десятка.

19. Рассмотренные приемы возведения в квадрат целых чисел применимы и к дробям.

а) $\left(3\frac{6}{7}\right)^2 = \left(3\frac{6}{7} + \frac{1}{7}\right)\cdot\left(3\frac{6}{7} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7}\right)^2 = 4\cdot 3\frac{5}{7} + \frac{1}{49} = 14\frac{6}{7} + \frac{1}{49} =$
$= 14\frac{43}{49}$;

$\left(4\frac{3}{5}\right)^2 = \left(4\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right)\cdot\left(4\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 5\cdot 4\frac{1}{5} + \frac{4}{25} = 21\frac{4}{25}$;

$19{,}8^2 = (19{,}8 + 0{,}2)\cdot(19{,}8 - 0{,}2) + (0{,}2)^2 = 20\cdot 19{,}6 + 0{,}04 =$
$= 392{,}04$;

$49{,}7^2 = (49{,}7 + 0{,}3)\cdot(49{,}7 - 0{,}3) + (0{,}3)^2 = 50\cdot 49{,}4 + 0{,}09 =$
$= 2470{,}09$.

Вычислите:

$\left(5\frac{2}{3}\right)^2$; $\left(7\frac{2}{7}\right)^2$; $\left(11\frac{3}{4}\right)^2$;

$\left(17\frac{5}{6}\right)^2$; $\left(24\frac{7}{8}\right)^2$; $\left(39\frac{3}{11}\right)^2$.

б) Особенно выгодно применять этот прием возведения в квадрат, когда смешанное число оканчивается $\frac{1}{2}$, т. е. 0,5. Тогда вычисление сводится к умножению целой части основания квадрата на целое число, следующее за ним, и приписыванию к полученному произведению $\frac{1}{4}$, т. е. 0,25.

Например: $\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 7 \cdot 8 + \frac{1}{4} = 56\frac{1}{4}$, или $7{,}5^2 = 7 \cdot 8 + 0{,}25 = 56{,}25$;

$\left(13\frac{1}{2}\right)^2 = 13 \cdot 14 + \frac{1}{4} = 182\frac{1}{4}$, или $13{,}5^2 = 13 \cdot 14 + 0{,}25 = 182{,}25$.

Обоснуйте этот прием.

Вычислите:

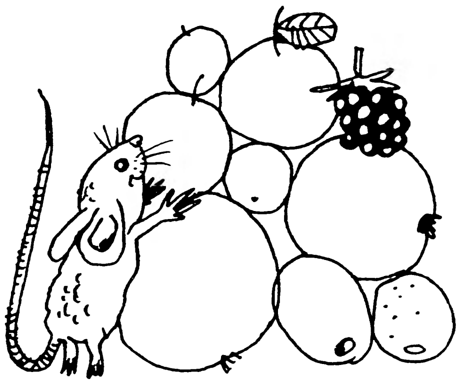
$6{,}5^2$;	$8{,}5^2$;	$11{,}5^2$;
$34{,}5^2$;	$49{,}5^2$;	$57{,}5^2$.

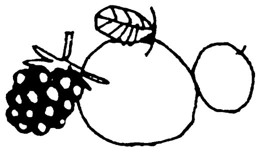
1.5. Вычисление значения одного выражения разными способами

20. Большие возможности для проявления творчества и смекалки создаются при вычислении значения одного и того же выражения разными способами. Конечно, не все пути нахождения значения выражения окажутся рациональными, но ценен сам процесс проявления творчества и изобретательности.

Например:

$$\begin{aligned}
\mathbf{47 + 28} &= 47 + 20 + 8 = \\
&= 40 + 28 + 7 = \\
&= (40 + 20) + (7 + 8) = \\
&= 50 + 28 - 3 = \\
&= 47 + 30 - 2 = \\
&= 50 + 30 - 3 - 2 = \\
&= \underline{47 + 3} + 25 = \\
&= 45 + \underline{2 + 28} = \\
&= \underline{47 + 23} + 5 = \\
&= 5 + \underline{42 + 28} = \\
&= \underline{47 + 13} + 15 = \\
&= 15 + \underline{32 + 28} = \\
&= 25 + \underline{22 + 28} = \\
&= 35 + \underline{12 + 28} = 75;
\end{aligned}$$





98 – 79 = 98 – 70 – 9 =
= (80 – 70) + (18 – 9) =
= 100 – 79 – 2 =
= 98 – 80 + 1 =
= 100 – 80 – 2 + 1 = 19;

38 • 6 = (30 + 8) • 6 = 30 • 6 + 8 • 6 = 180 + 48 = 228;
38 • 6 = (40 – 2) • 6 = 40 • 6 – 2 • 6 = 240 – 12 = 228;
38 • 6 = 38 • 3 • 2 = 114 • 2 = 228;
38 • 6 = 38 • 2 • 3 = 76 • 3 = 228;
38 • 6 = 38 • (5 + 1) = 38 • 5 + 38 = 190 + 38 = 228;
38 • 6 = 38 • (10 – 4) = 38 • 10 – 38 • 4 = 380 – 152 = 228;
38 • 6 = (37 + 1) • 6 = 37 • 3 • 2 + 6 = 222 + 5 = 228;
38 • 6 = 38 • 10 – 38 • 5 + 38 = 380 – 38 • 10 : 2 + 38 = 380 – 190 + + 38 = 190 + 38 = 228;
38 • 6 = (35 + 3) • 6 = 35 • 6 + 3 • 6 = 210 + 18 = 228;
39 • 25 = (30 + 9) • 25 = 30 • 25 + 9 • 25 = 750 + 225 = 975;
39 • 25 = 25 • 39 = (20 + 5) • 39 = 20 • 39 + 5 • 39 = 780 + 5 • 40 – 5 = = 780 + 195 = 975;
39 • 25 = (40 – 1) • 25 = 40 • 25 – 25 = 1000 – 25 = 975;
39 • 25 = 39 : 4 • 100 = (9 ост. 3) • 100 = 900 + 3 : 4 • 100 = 975;
39 • 25 = 39 • (10 + 10 + 5) = 390 + 390 + 195 = 975;
39 • 25 = 39 • (30 – 5) = 39 • 30 – 39 • 5 = 1170 – 195 = 1200 – 200 – – 30 + 5 = 975;
39 • 12 = (30 + 9) • 12 = 30 • 12 + 9 • 12 = 360 + 108 = 468;
39 • 12 = 39 • (10 + 2) = 39 • 10 + 39 • 2 = 390 + 78 = 468;
39 • 12 = (40 – 1) • 12 = 40 • 12 – 12 = 480 – 12 = 468;
39 • 12 = 39 • 3 • 2 • 2 = 117 • 2 • 2 = 234 • 2 = 468;
39 • 12 = (35 + 4) • 12 = 35 • 12 + 4 • 12 = 350 + 70 + 48 = 420 + 48 = = 468;
39 • 12 = (36 + 3) • 12 = 3 • 12 • 12 + 3 • 12 = 3 • 144 + 36 = 432 + 36 = = 468;
39 • 12 = (37 + 2) • 12 = 37 • 3 • 4 + 2 • 12 = 444 + 24 = 468;
137 • 8 = (100 + 30 + 7) • 8 = 100 • 8 + 30 • 8 + 7 • 8 = 800 + 240 + + 56 = 1096;
137 • 8 = (130 + 7) • 8 = 130 • 8 + 7 • 8 = 1040 + 56 = 1096;
137 • 8 = (140 – 3) • 8 = 140 • 8 – 3 • 8 = 1120 – 24 = 1096;
137 • 8 = (150 – 13) • 8 = 150 • 8 – 13 • 8 = 1200 – 104 = 1096;
137 • 8 = 137 • (10 – 2) = 137 • 10 – 137 • 2 = 1370 – 274 = 1096;
137 • 8 = (125 + 12) • 8 = 125 • 8 + 12 • 8 = 1000 + 96 = 1096;
137 • 8 = 137 • (9 – 1) = (100 + 37) • 3 • 3 – 137 = 900 + 37 • 3 • 3 – – 137 = 900 + 333 – 137 = 1096;
137 • 8 = (100 + 37) • 8 = 100 • 8 + 37 • 3 • 3 – 37 = 800 + 333 – 37 = = 1096;

$$4{,}5 \cdot 1{,}5 = \begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 4{,}5 \\ 1{,}5 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 225 \\ 45 \end{array} \\ \hline 6{,}75 \end{array}$$

$4{,}5 \cdot 1{,}5 = \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4} = 6{,}75;$

$4{,}5 \cdot 1{,}5 = 4{,}5 \cdot \frac{3}{2} = 4{,}5 \cdot 3 : 2 = 13{,}5 : 2 = 6{,}75;$

$4{,}5 \cdot 1{,}5 = \frac{9}{2} \cdot 1{,}5 = 9 \cdot 1{,}5 : 2 = 13{,}5 : 2 = 6{,}75;$

$4{,}5 \cdot 1{,}5 = 4{,}5 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 4{,}5 + 4{,}5 : 2 = 4{,}5 + 2{,}25 = 6{,}75;$

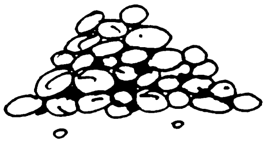
$4{,}5 \cdot 1{,}5 = \left(4 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1{,}5 = 4 \cdot 1{,}5 + 1{,}5 : 2 = 6 + 0{,}75 = 6{,}75;$

$4{,}5 \cdot 1{,}5 = 3 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 3 \cdot 1{,}5^2 = 3 \cdot 2{,}25 = 6{,}75;$

$4{,}5 \cdot 1{,}5 = 4{,}5 \cdot 4{,}5 : 3 = 4{,}5^2 : 3 = 20{,}25 : 3 = 6{,}75;$

$4{,}5 \cdot 1{,}5 = (3 + 1{,}5) \cdot 1{,}5 = 3 \cdot 1{,}5 + 1{,}5^2 = 4{,}5 + 1{,}52 = 4{,}5 + 2{,}25 = 6{,}75;$

$4{,}5 \cdot 1{,}5 = (4 + 0{,}5) \cdot (1 + 0{,}5) = 4 \cdot 1 + (4 + 1) \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2 = 4 + 2{,}5 + 0{,}25 = 6{,}75;$



$$8{,}5 \cdot 7{,}5 = \begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 8{,}5 \\ 7{,}5 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 425 \\ 595 \end{array} \\ \hline 63{,}75 \end{array}$$

$8{,}5 \cdot 7{,}5 = \frac{17 \cdot 15}{2 \cdot 2} = \frac{255}{4} = 63\frac{3}{4} = 63{,}75;$

$8{,}5 \cdot 7{,}5 = (7{,}5 + 1) \cdot 7{,}5 = 7{,}5^2 + 7{,}5 = 56{,}25 + 7{,}5 = 63{,}75;$

$8{,}5 \cdot 7{,}5 = 8{,}5 \cdot (8{,}5 - 1) = 8{,}5^2 - 8{,}5 = 72{,}25 - 8{,}5 = 63{,}75;$

$8{,}5 \cdot 7{,}5 = 8{,}5 \cdot (10 - 2{,}5) = 8{,}5 \cdot 10 - 8{,}5 \cdot 10 : 4 = 8{,}5 - 21{,}25 = 63{,}75;$

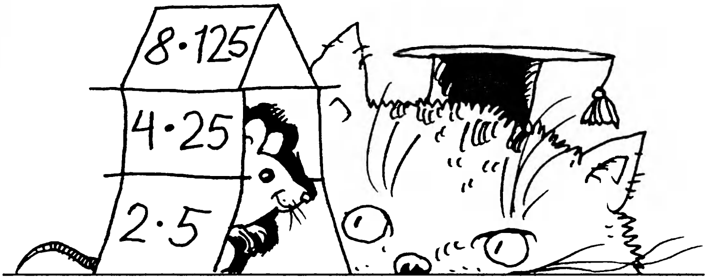
$8{,}5 \cdot 7{,}5 = (8 + 0{,}5) \cdot (7 + 0{,}5) = 8 \cdot 7 + (8 + 7) \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2 = 56 + 7{,}5 + 9{,}25 = 63{,}75;$

$8{,}5 \cdot 7{,}5 = (8 + 0{,}5) \cdot (8 - 0{,}5) = 8^2 - 0{,}5^2 = 64 - 0{,}25 = 63{,}75.$

Выполните вычисления разными способами:

$56 + 39;$	$97 - 68;$	$49 \cdot 8;$
$12{,}5 \cdot 16;$	$5{,}5 \cdot 6{,}5;$	$135 \cdot 15.$

2 Вычисления с использованием частных свойств чисел



Если использовать частные свойства чисел, то вычисление иногда становится возможным значительно упростить. В этом пункте мы и рассмотрим некоторые такие случаи вычислений.

2.1. Замечательное произведение

21. **а)** Вычислите произведения:

$2 \cdot 5$;
$4 \cdot 25$;
$8 \cdot 125$;
$16 \cdot 625$;
… .

Из каких простых множителей состоят первые компоненты? А вторые? По сколько множителей, тех и других, оказывается в каждом произведении? Сравнив получившиеся результаты, сделайте вывод: как можно написать в таких случаях результат, зная показатели степени 2 и 5? Составьте очередные такие произведения, проверив тем самым свой вывод. Обоснуйте вывод.

б) Выполните вычисления:

10 : 2;	10 : 5;
100 : 4;	100 : 25;
1000 : 8;	1000 : 125;
10 000 : 16;	100 000 : 625;
… ;	… .

Как подобраны делимые? А делители? Какая связь между делимым, делителем и частным в каждом случае? Сделайте общий вывод и обоснуйте его. Постройте очередные случаи деления.

22. Опираясь на выводы предшествующего задания, выполните вычисления:

а) $175 \cdot 4$;	$375 \cdot 8$;	$1875 \cdot 16$;
$375 \cdot 4$;	$875 \cdot 8$;	$3125 \cdot 16$;
$425 \cdot 4$;	$625 \cdot 8$;	$4375 \cdot 16$;
б) $25 \cdot 12$;	$125 \cdot 24$;	$625 \cdot 32$;
$25 \cdot 48$;	$125 \cdot 32$;	$625 \cdot 48$;
$25 \cdot 72$;	$125 \cdot 96$;	$625 \cdot 64$;
в) $75 \cdot 16$;	$375 \cdot 24$;	$1875 \cdot 80$;
$175 \cdot 12$;	$875 \cdot 16$;	$3125 \cdot 48$;
$525 \cdot 28$;	$750 \cdot 32$;	$4375 \cdot 32$;

г) вычислите удобными способами:

$25\,637 \cdot 4$;	$28 \cdot 4$;	$125 \cdot 9$;
$8 \cdot 586 \cdot 125$;	$27 \cdot 8$;	$75 \cdot 36$;
$12 \cdot 250 \cdot 3$;	$124 \cdot 8$;	$875 \cdot 72$.

2.2. Умножение и деление на 5^n

23. а) Чтобы число, кратное четырем, умножить на 25, достаточно его разделить на 4 и к полученному частному приписать два нуля. Обоснуйте это правило. Примените это правило при умножении на 25 чисел:

12;	56;	64;
76;	88;	96;
244;	648;	724;
928;	964;	984.

б) Чтобы число, кратное 25, разделить на 25, достаточно его число сотен умножить на 4 и к полученному произведению прибавить 1 (а не приписывать!), если делимое имело окончание 25; прибавить 2, если делимое имело окончание 50; прибавить 3, если делимое имело окончание 75; и ничего не прибавлять, если делимое оканчивалось двумя или более нулями*.

Обоснуйте это правило и примените его при делении на 25 чисел:

325;	750;	575;
425;	850;	675;
725;	800;	1275;
2350;	1900;	53 000.

* Это правило можно было выразить и так: чтобы числа, имеющие окончания 00, 25, 50, 75, разделить на 25, достаточно отбросить эти окончания, оставшуюся часть делимого умножить на 4 и прибавить (не приписать!) в соответствии с окончанием делимого 0, 1, 2 или 3.

24. **а)** Если число не кратно 4, то можно при умножении на 25 сразу делить умножаемое число на 4, сделав поправку с учетом получаемого при этом остатка. Тогда, чтобы целое число умножить на 25, достаточно его разделить на 4 и к полученному частному приписать два нуля, или 25, или 50, или 75 в соответствии с остатком (0, 1, 2, 3), полученным при делении на 4. Обоснуйте это правило.

Пользуясь этим правилом, умножьте на 25 числа:

37;	48;	54;
65;	91;	123;
246;	621;	456.

б) Чтобы число разделить на 25, достаточно его умножить на 4 и в полученном произведении отделить запятой две цифры, считая справа налево. Обоснуйте это правило.

Пользуясь этим правилом, разделите на 25 числа:

78;	164;	287;
326;	471;	581;
17;	23;	38.

в) Изложенное в п. б) правило значительно упрощается, когда делимое оканчивается двумя и более нулями.

Чтобы число, оканчивающееся двумя и более нулями, разделить на 25, достаточно отбросить в делимом два нуля, а оставшуюся часть делимого умножить на 4. Обоснуйте это правило.

Пользуясь этим правилом, разделите на 25 числа:

1700;	72 000;	48 000 000;
2900;	60 000;	530 000 000.
34 000;	1 200 000;	

25. **а)** Умножьте на 125 числа:

32;	48;	56;	168;
264;	416;	872;	7224.

Все эти числа делятся на 8, и к каждому полученному результату припишите три нуля. Сравните эти результаты с ранее полученными произведениями. Сформулируйте правило умножения на 125 чисел, делящихся на 8.

б) Разделите на 125 числа:

375;	625;	750;	8000;
7125;	8250;	6375;	9500;
7625;	4750;	13 875;	32 625.

Какие подобраны здесь делимые (какие у них окончания из трех цифр)? Попробуйте сразу умножить число тысяч делимого на 8 и к полученному произведению прибавить (не приписать!) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 в соответствии с окончанием делимого 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875. Сформулируйте правило деления на 125 чисел, кратных 125. Обоснуйте это правило.

в) Сформулированное правило деления чисел на 125 упрощается, если делимое оканчивается тремя и более нулями. Составьте это правило и обоснуйте его. Примените правило при делении на 125 чисел:

7000;	13 000;	19 000;
240 000;	1 200 000;	54 000 000.

26. а) Если число не кратно 8, то правило умножения чисел на 125 можно сформулировать так: чтобы число умножить на 125, достаточно его разделить на 8, и это будут тысячи получаемого произведения. Затем остаток, полученный при делении на 8, умножить на 125 и приписать этот результат к уже полученному числу тысяч. Обоснуйте это правило. Примените его при умножении на 125 чисел:

33;	26;	47;	58;
67;	77;	167;	526.

б) Более общее правило деления чисел на 125 можно сформулировать так: чтобы число разделить на 125, достаточно его умножить на 8 и в полученном произведении отделить запятой три цифры, считая справа налево. Обоснуйте это правило. Примените его при делении на 125 чисел:

23;	128;	241;	523;
715;	886;	1125;	5401.

в) Вычисление упрощается, когда делимое оканчивается тремя и более нулями: чтобы разделить на 125 число, оканчивающееся тремя и более нулями, достаточно отбросить три нуля в делимом, а оставшуюся часть умножить на 8.

Разделите на 125 числа:

14 000;	23 000;	53 000;
60 000;	720 000;	1 000 000.

27. Нами рассмотрены случаи умножения и деления на 25 и 125, т. е. на 5^2 и 5^3. Можно идти дальше, взяв очередные степени 5, а затем построить обобщающие правила умножения и деления на 5^n. Например:

а) чтобы умножить число на 5^n, достаточно его разделить на 2^n, а затем к полученному результату приписать произведение $5^n \cdot r$, где r — остаток, полученный при делении множимого на 2^n;

б) чтобы число разделить на 5^n, достаточно его умножить на 2^n и в полученном произведении отделить запятой n цифр, считая справа налево.

Обоснуйте эти правила.

2.3. Умножение и деление с дробными числами

28. Рассмотрим некоторые случаи умножения и деления с дробными числами.

а) Чтобы число, кратное 4, умножить на $2\frac{1}{2}$, достаточно его разделить на 4 и к полученному результату приписать 0.

Например, $48 \cdot 2\frac{1}{2} = 48 : 4 \cdot 10 = 120$.

Обоснуйте это правило.

Умножьте на $2\frac{1}{2}$ числа:

20; 184;

64; 364.

б) Чтобы любое целое число умножить на $2\frac{1}{2}$, можно его разделить на 4 (так получим десятки искомого произведения), а затем остаток, полученный при делении, умножить на $2\frac{1}{2}$ и приписать этот результат к уже полученному началу произведения.

Например, $37 \cdot 2\frac{1}{2}$; $37 : 4 = 9$ (ост. 1); $1 \cdot 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$; $37 \cdot 2 = 92\frac{1}{2}$.

Обоснуйте это правило.

Умножьте на $2\frac{1}{2}$ числа:

56; 98;

77; 351.

в) Чтобы целое число, кратное 8, умножить на $1\frac{1}{4}$ $\left(12\frac{1}{2}\right)$, достаточно его разделить на 8 и к полученному результату приписать нуль (два нуля).

Например, $72 \cdot 1\frac{1}{4} = (72 : 8) \cdot 10 = 90$;

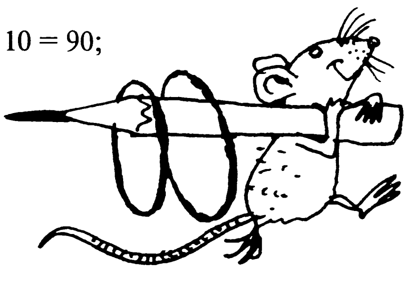
$232 \cdot 12\frac{1}{2} = (232 : 8) \cdot 100 = 2900$.

Обоснуйте это правило.

Умножьте на $12\frac{1}{2}$ числа:

32; 104;

96; 776.

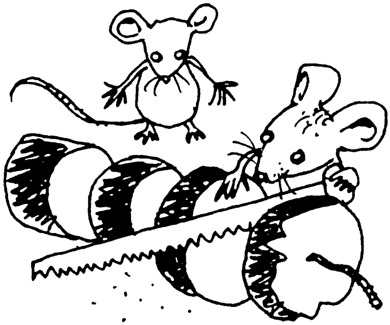


Умножьте на $1\frac{1}{4}$ числа:

24;	536;
88;	680.

г) Чтобы число умножить на 0,25 (0,125), достаточно его разделить на 4 (на 8).

Например, $724 \cdot 0{,}25 = 724 : 4 = 181$;
$496 \cdot 0{,}125 = 496 : 8 = 62$;
$19 \cdot 0{,}25 = 19 : 4 = 4{,}75$;
$23 \cdot 0{,}125 = 23 : 8 = 2{,}875$.



Обоснуйте это правило.

Умножьте на 0,25 числа:

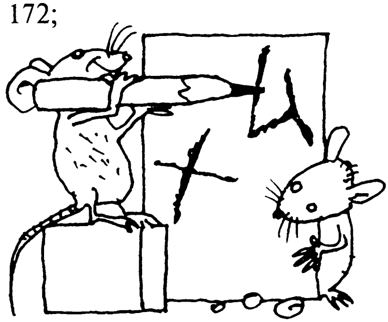
13;	273;
69;	567.

Умножьте на 0,125 числа:

17;	586;
87;	749.

д) Чтобы число разделить на 0,25 (на 0,125), достаточно его умножить на 4 (на 8).

Например, $43 : 0{,}25 = 43 \cdot 4 = 172$;
$57 : 0{,}125 = 57 \cdot 8 = 456$.



Обоснуйте это правило.

Разделите на 0,25 числа:

47;	145;
93;	283.

Разделите на 0,125 числа:

43;	158;
97;	321.

29. а) Чтобы число разделить на $3\frac{1}{3}$ $\left(33\frac{1}{3}, 333\frac{1}{3}, 3333\frac{1}{3}, \ldots\right)$, достаточно его умножить на 3 и в полученном произведении отделить одну (две, три, четыре, ...) цифру, считая справа налево. Обоснуйте это правило.

Разделите на $3\frac{1}{3}$ числа:

18;	25;	47;
214;	583;	722.

Разделите на $33\frac{1}{3}$ и на $333\frac{1}{3}$ числа:

14;	27;	36;
52;	73;	84;
217;	422;	1325.

б) Сформулируйте аналогичные правила деления чисел на:

1) $1\frac{1}{9}$; $11\frac{1}{9}$; $111\frac{1}{9}$ и т. п. 2) $1\frac{3}{7}$; $14\frac{2}{7}$; $142\frac{6}{7}$ и т. п.

Обоснуйте эти правила. Примените эти правила к делению подобранных вами чисел.

2.4. Умножение и деление на $\underbrace{99...9}_{n \text{ раз}}$

30. Особый интерес представляет умножение и деление на числа, записанные одними девятками.

а) Пусть надо 46 умножить на 9.

1) Вычтем из множимого число его десятков и еще единицу: $46 - 4 - 1 = 41$. Столько десятков содержит искомое произведение.

2) Вычтем из 9 цифры только что полученного числа: $9 - 4 - 1 = 4$ — это цифра единиц искомого произведения (если сумма цифр, которые надо вычитать, больше 9, то их вычитают из 18).

3) Итак, $46 \cdot 9 = 414$.

Еще пример: $83 \cdot 9$:

1) $83 - 8 - 1 = \underline{74}$; 2) $18 - 7 - 4 = \underline{\underline{7}}$; 3) $83 \cdot 9 = \underline{74}\underline{\underline{7}}$.

Можно сформулировать правило: чтобы двузначное число умножить на 9, достаточно из него вычесть его же десятки и еще единицу, получив тем самым количество десятков искомого произведения. Вычтя из 9 или 18 сумму цифр найденного начала произведения, получим его единицы. Обоснуйте это правило.

Умножьте на 9 числа:

74;	68;	87;
47;	92;	56.

Сформулируйте аналогичное правило умножения на 9 трехзначных, четырехзначных и др. чисел.

б) Возьмем трехзначное число, которое делится на 9 (чтобы узнать, делится ли трехзначное число на 9, достаточно найти его сумму цифр, если эта сумма равна 9 или 18, то такое трехзначное число делится на 9. В предельном случае лишь одно трехзначное число, делящееся на 9, имеет сумму цифр 27 — это число 999).

Пусть надо 657 разделить на 9. Сумма его цифр 6 + 5 + 7 = 18, значит, оно делится на 9.

1) Отбросим в делимом цифру единиц, получается 65.

2) К этому числу прибавим его же десятки (это сотни делимого) и еще 2, т. е. 65 + 6 + 2 = 73 (если сумма цифр делимого равна 9, то надо прибавить не 2, а 1).

3) Результат готов: 657 : 9 = 73.

Еще примеры.

792 : 9: (7 + 9 + 2 = 18);
1) 79; 2) 79 + 7 + 2 = 88; 3) 792 : 9 = 88;
351 : 9: (3 + 5 + 1 = 9);
1) 35; 2) 35 + 3 + 1 = 39; 3) 351 : 9 = 39;
576 : 9: (5 + 7 + 6 = 18);
1) 57; 2) 57 + 5 + 2 = 64; 3) 576 : 9 = 64;
423 : 9: (4 + 2 + 3 = 9);
1) 42; 2) 42 + 4 + 1 = 47; 3) 423 : 9 = 47.

Правило могло быть таким: чтобы трехзначное число, которое кратно 9, разделить на 9, достаточно: 1) отбросить в нем цифру единиц; 2) к оставшемуся двузначному числу прибавить его же десятки (то же, что и сотни делимого) и еще 1 (если сумма цифр делимого 9) или 2 (если сумма цифр делимого 18); 3) результат готов. Обоснуйте это правило.

Пользуясь правилом, разделите на 9 числа:

324; 513; 828;
261; 756; 846.

Сформулируйте аналогичное правило деления на 9 четырехзначных и иных чисел, кратных 9.

31. Чтобы четырехзначное или трехзначное число умножить на 99, достаточно: 1) из него вычесть его же сотни и еще 1; 2) приписать к полученному результату разность числа 100 и числа, записанного двумя последними цифрами множимого; 3) результат готов.

Приведем примеры.

728 • 99:
1) 728 – 7 – 1 = 720; 2) 100 – 28 = 72; 3) 728 • 99 = 72 072;
564 • 99:
1) 564 – 5 – 1 = 558; 2) 100 – 64 = 36; 3) 564 • 99 = 55 836;
3284 • 99:
1) 3284 – 32 – 1 = 3251; 2) 100 – 84 = 16; 3) 3284 • 99 = 325 116;
7653 • 99:
1) 7653 – 76 – 1 = 7576; 2) 100 – 53 = 47; 3) 7653 • 99 = 757 647.

Обоснуйте это правило.

Применяя это правило, умножьте на 99 числа:

237; 563; 3649;
458; 2784; 7872.

32. Умножение на числа, записанные только девятками, можно выполнять по следующим правилам.

а) Чтобы умножить однозначное число на 9, достаточно: 1) написать число на единицу меньше его; 2) к полученному числу приписать дополнение умноженного числа до десяти; 3) результат готов.

Например, $7 \cdot 9$:

1) $7 - 1 = 6$; 2) $10 - 7 = 3$; 3) $7 \cdot 9 = 63$.

б) Аналогично поступаем при умножении двузначного числа на 99, только при отыскании второй части записи произведения находим дополнение множимого до 100.

Например, $38 \cdot 99$:

1) $38 - 1 = 37$; 2) $100 - 38 = 62$; 3) $38 \cdot 99 = 3762$.

Если умножаем однозначные числа на 99, то множимому можно придать вид двузначного числа, приписав слева один 0.

Например, $08 \cdot 99$:

1) $8 - 1 = 7$; 2) $100 - 8 = 92$; 3) $8 \cdot 99 = 792$.

Если умножаем трехзначное или четырехзначное число на 99, то это вычисление можно выполнить по частям.

Например, $364 \cdot 99 = 300 \cdot 99 + 64 \cdot 99 = (03 \cdot 99) \cdot 100 + 64 \cdot 99$.

$03 \cdot 99$:

1) $3 - 1 = 2$; 2) $100 - 3 = 97$; 3) $3 \cdot 99 = 297$;

$64 \cdot 99$:

1) $64 - 1 = 63$; 2) $100 - 64 = 36$; 3) $64 \cdot 99 = 6336$.

Итак, $364 \cdot 99 = 297 \cdot 100 + 6336 = 36\,036$.

в) При умножении трехзначного числа на 999 поступаем аналогично, только при отыскании второй части записи произведения находим дополнение множимого до 1000. И опять же, если множимое двузначное или однозначное число, то его можно «удлинить», приписав спереди нули. А если множимое «длиннее» трехзначного числа, то вычисление можно выполнить по частям.

Приведем примеры.

$726 \cdot 999$:

1) $726 - 1 = 725$; 2) $1000 - 726 = 274$; 3) $726 \cdot 999 = 725\,274$;

$84 \cdot 999 = 084 \cdot 999$:

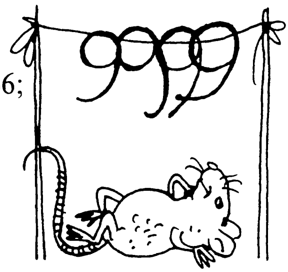
1) $84 - 1 = 83$; 2) $1000 - 83 = 917$; 3) $84 \cdot 999 = 83\,917$;

$26\,573 \cdot 999 = 26\,000 \cdot 999 + 573 \cdot 999 = (26 \cdot 999) \cdot 1000 + 573 \cdot 999$;
$026 \cdot 999$:
1) $26 - 1 = 25$; 2) $1000 - 26 = 974$; 3) $26 \cdot 999 = 25\,974$;
$573 \cdot 999$:
1) $573 - 1 = 572$; 2) $1000 - 573 = 427$; 3) $573 \cdot 999 = 572\,427$.

Итак, $26\,573 \cdot 999 = 25\,974 \cdot 1000 + 572\,427 = 26\,546\,427$.

г) По аналогии можно сформулировать обобщенное правило умножения на числа вида $\underbrace{99...9}_{n \text{ раз}}$, применяя «удлинение» и «укорачивание» умножаемого числа, чтобы оно имело столько же знаков, сколько и число $\underbrace{99...9}_{n \text{ раз}}$.

Например:
$42\,865 \cdot 99\,999$:
1) $42\,865 - 1 = 42\,864$; 2) $100000 - 42865 = 57\,135$;
3) $42\,865 \cdot 99\,999 = 486\,457\,135$;
$734 \cdot 9999$:
1) $734 - 1 = 733$; 2) $10\,000 - 734 = 9266$;
3) $734 \cdot 9999 = 7\,339\,266$.



Обоснуйте эти правила.

Умножьте на 99 числа:

48;	23;	54;
87;	8;	6.

Умножьте на 999 числа:

376;	623;	485;
76;	63;	27.

33. Чтобы сформулировать и применить правила деления на числа вида $\underbrace{99...9}_{n \text{ раз}}$, потребуется знание признаков делимости на эти числа.

а) Трехзначное или четырехзначное число делится на 99 тогда и только тогда, когда число, выраженное последними двумя цифрами, и число, выраженное первыми двумя цифрами (в случае трехзначного числа — одной), в сумме составляют 99.

Делятся ли на 99 числа:

297;	5643;	7425;	1881;
792;	5685;	876;	4752?

Докажите этот признак.

б) Числа, более чем четырехзначные, делятся на 99 тогда и только тогда, когда, разбив его на части по две цифры, считая справа налево, и сложив эти части, получим 99 или число, кратное 99. (Можно полученный результат, когда он больше 99, повторно разбить на части и еще раз их сложить.)

Делятся ли на 99 числа:

74 349;	716 562;	81 965 763;
84 563;	354 127;	6 197 898 564?

Докажите этот признак.

в) Если трехзначное или четырехзначное число делится на 99, то, чтобы его разделить на 99, достаточно в нем отбросить последние две цифры, а оставшуюся часть делимого увеличить на единицу.

Разделите на 99 числа:

4257;	6237;
891;	5841.

Обоснуйте это правило.

г) Чтобы шестизначное число, делящееся на 99, разделить на 99, достаточно: 1) отбросить две последние цифры делимого; 2) к оставшемуся числу прибавить число его же сотен и еще 1, если сумма цифр делимого 18 или 27, или прибавить 2, если эта сумма более 27; 3) результат готов.

Например:

757 647 : 99 (7 + 5 + 7 + 6 + 4 + 7 = 36);

1) 7576; 2) 7576 + 75 + 2 = 7653; 3) 757 647 : 99 = 7653;

325 116 : 99 (3 + 2 + 5 + 1 + 1 + 6 = 18);

1) 3251; 2) 3251 + 32 + 1 = 3284; 3) 325 116 : 99 = 3284;

891 891 : 99 (8 + 9 + 1 + 8 + 9 + 1 = 36);

1) 8918; 2) 8918 + 89 + 2 = 9009; 3) 891 891 : 99 = 9009.

Обоснуйте это правило.

Разделите на 99 числа:

549 549;	647 658;	435 105;
215 127;	781 902;	731 709.

д) На 999 делятся числа тогда и только тогда, когда, разбив его на части по три цифры, считая справа налево, и сложив эти части, получим 999 или число, кратное 999 (можно также применить и повторное сложение).

Делятся ли на 999 числа:

624 375;

875 657 466;

234 864 235?

е) Если пятизначное или шестизначное число делится на 999, то при делении его на 999 достаточно в делимом отбросить три последние цифры, а оставшуюся часть делимого увеличить на 1.

Разделите на 999 числа:

52 947;	713 286;	452 547;
264 735;	168 831;	120 087.

ж) Можно сформулировать аналогичные признаки делимости и правила деления на 9999, 99 999, ..., $\underbrace{99...9}_{n \text{ раз}}$. Сделайте это.

з) Во всех рассмотренных случаях принималось во внимание только деление без остатка. Однако, применяя перечисленные признаки делимости, можно заранее определить будущий остаток и на него уменьшить делимое, чтобы деление выполнялось без остатка. Например, 5348 не делится на 99, так как 53 + 48 = 101, что больше 99 на 2 единицы. Уменьшив заданное число на 2 единицы и разделив его на 99, получим 5346 : 99 = 54, тогда 5348 : 99 = 54 (ост. 2).

Разделите на 99 числа:

2476; 8716;

6537; 9807.

2.5. Умножение на 11

34. а) Умножая двузначное число на 11, как правило, получаем трехзначное число (четырехзначное произведение получается при умножении на 11 чисел, больших 90).

В получаемом трехзначном числе всегда цифра единиц такая же, как и во множимом, а цифра сотен такая же, как и цифра десятков множимого. Десятки искомого произведения получаем, сложив цифры множимого (если получается сумма более 9, то образовавшуюся сотню, т. е. единицу, прибавляем к сотням произведения).

Правило умножения двузначного числа на 11 можно сформулировать так: 1) напишите цифру единиц множимого; 2) сложите цифры множимого; 3) напишите эту сумму впереди уже полученной цифры единиц будущего произведения (если получилась такая сумма более 9, то образовавшуюся из десятков сотню отнесите в третий разряд произведения); 4) впереди (в третьем разряде) записанных уже цифр напишите цифру десятков множимого. Результат готов.

Например:

26 • 11:

1) ...6; 2) 6 + 2 = 8; 3) ...86; 4) 286; 26 • 11 = 286;

78 • 11:

1) ...8; 2) 7 + 8 = 15; 3) ...58; 4) 7 + 1 = 8; 78 • 11 = 858.

Умножьте на 11 числа:

34; 57; 83;

42; 68; 87.

Обоснуйте это правило.

б) Можно сформулировать правило умножения на 11 всякого многозначного числа: чтобы число умножить на 11, достаточно:

1) в искомом произведении записать цифру единиц множимого; 2) складывать последовательно попарно рядом стоящие цифры множимого и записывать полученные суммы в очередных разрядах произведения (если получается сумма больше 9, то писать только последнюю цифру, а единицу относить в очередной разряд); 3) в наивысшем разряде произведения окажется наивысшая цифра множимого или на 1 больше.

Например,

76 423 • 11:

1) ...3; 2) 3 + 2 = 5; 3) 2 + 4 = 6; 4) 4 + 6 = 10;
5) 1 + 6 + 7 = 14; 6) 1 + 7 = 8; 76 423 • 11 = 840 653.

Умножьте на 11 числа:

38 636;	628 137;
237 654;	725 483.

Обоснуйте правило.

в) Всякое трехзначное число $\overline{abc}$* делится на 11, если $b = a + c$; когда $a + c \leqslant 9$, а при $a + c > 9$ $11 + b = a + c$**.

Правило: чтобы разделить на 11 трехзначное число $\overline{abc}$, где $a + c = b$ при $a + c \leqslant 9$ и $a + c = 11 + b$ при $a + c > 9$, достаточно написать в первом случае двузначное число $\overline{ac}$, а во втором — $\overline{(a-1)\,c}$.

Разделите на 11 числа:

187;	275;	396;	352;	451;
594;	473;	561;	462;	429;
517;	638;	715;	913;	836.

Обоснуйте признак делимости и правило.

2.6. «Умножение без умножения», или умножение многозначных чисел

35. В наше время кажется невероятным, что умножение многозначных чисел может быть выполнено без знания таблицы умножения, а лишь с помощью сложения и умножения на 10^n.

Например, надо умножить 3684 на 574***.

---

* Это специальное обозначение числа с неизвестными цифрами, но известным их количеством, т. е. $\overline{abc}$ — есть трехзначное число, у которого a — цифра сотен, b — цифра десятков, c — цифра единиц. $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

** Это не общий признак делимости на 11, а один из его частных случаев.

*** Рассмотренный вычислительный прием известен давно. Его применял еще «король математики» К. Ф. Гаусс (1777—1855).

1) Напишите первый сомножитель 3684 и припишите два нуля (второй сомножитель начинается с сотен). Под ним напишите еще и еще такое же число. Сложите последние два числа и полученную сумму подпишите ниже. Эти операции заменяют умножение на 500.

2) Под этими числами напишите множимое 3684 и припишите к нему 0. Напишите еще такое же число. Сложите эти два числа и подпишите ниже.

Сложите последние два числа и подпишите полученную сумму ниже. Эти операции заменяют умножение на 70.

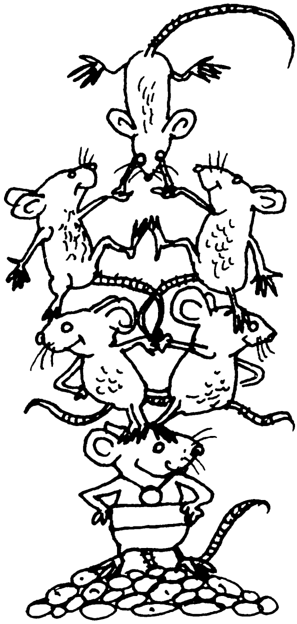
3) Напишите два раза множимое, сложите эти множимые и полученную сумму запишите ниже. Эти операции заменяют умножение на 4.

4) Сложите все полученные числа. Это и будет окончательный результат.

$$3684 \cdot 574$$

$$+\left\{\begin{array}{lr}
1) & 368400 \\
 & +368400 \\
 & 368400 \\ \hline
 & 736800 \\
2) & 36840 \\
 & +36840 \\ \hline
 & +73680 \\ \hline
 & 110520 \\
3) & 3684 \\
 & +3684 \\ \hline
 & 7368
\end{array}\right.
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Умножение на 500.} \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Умножение на 70.} \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Умножение на 4.}
\end{array}$$

$$4) \quad 2114616.$$

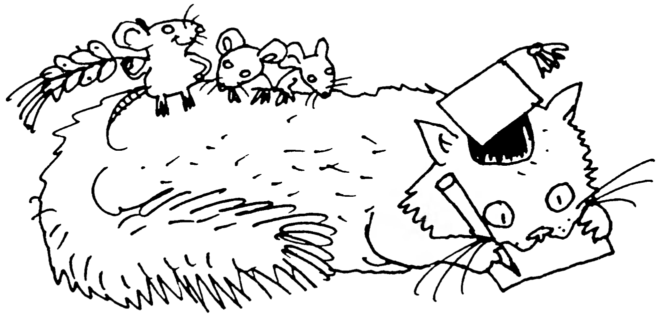


Проверьте полученный результат с помощью привычного приема умножения или с помощью вычислительных средств (калькулятора, арифмометра, таблицы и т. п.).

Как видим, в этом вычислительном приеме удвоение заменяется сложением двух множимых, а если еще прибавить множимое, то это равносильно умножению его на 3 и т. п.

Вычисление значительно ускорилось бы, если согласиться на применение удвоения. Тогда можно было бы рассматривать 5 как 1 + 2 + 2, а 7 как 1 + 2 + 4.

$$\begin{array}{r} 3684 \cdot 574 \\ \hline 368400 \\ +\ 736800 \\ 36840 \\ 73680 \\ 147360 \\ 3684 \\ 7368 \\ \hline 2114616 \end{array}$$



В подобных вычислениях число 3 рассматривалось как 1 + 2, 6 — как 2 + 4, 8 — как 2 + 4 + 2, или 4 + 4. А если уже в предшествующих строчках имелись удвоения множимого и еще раз удвоение, то можно было бы рассматривать 8 как 2 + 6; 1 + 7; 3 + 5, а 9 — как 1 + 2 + 2 + 4; 1 + 4 + 4; 1 + 2 + 3 + 3 и т. п. в зависимости от того, какие имеются предшествующие результаты.

Вычислите этим способом:

7235 • 463; 4658 • 257;
6374 • 582; 12 457 • 3689.

Прием умножения многозначных чисел («умножение без умножения»), с которым вы ознакомились, вряд ли в наше время имеет большое практическое значение, но познавательная его ценность существенная. Он громоздкий, но зато мы обходимся без таблицы умножения. Кстати, если давать оценку рассмотренного и привычного приемов умножения с позиций их практичности, то следовало бы принять во внимание и то, что всегда применяемый современный прием стал привычным и хорошо освоенным, а потому он кажется удобным и выгодным, ему мы и отдаем предпочтение, хотя он и требует большего запаса знаний. А в случае применения предложенного приема умножения мы опираемся на меньший круг знаний. И если применить экономные способы фиксации промежуточных результатов и их суммирования (например, с помощью счетов, арифмометра, калькулятора и т. п.), то он мог бы стать тоже удобным и выгодным, а при выработке соответствующих навыков мы могли бы ему отдать предпочтение.

2.7. «Деление без деления», или деление многозначных чисел

36. Деление чисел можно выполнить, применяя только вычитание, сложение и знание нумерации. Этот процесс будет короче, если применять еще и удвоение делителя.

Рассмотрим это на конкретном примере.

1) − 1328 208 : 536
      1072 ... 2000

2) − 2562
      2144 ... 400

3) − 4180
      2144 ... 40

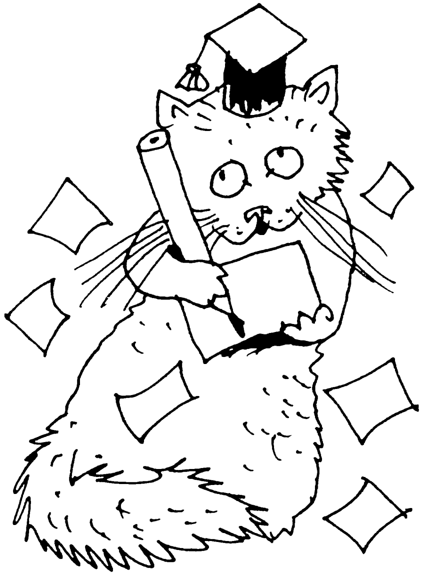
4) − 2036
      1072 ... 20

5) − 964
      536 ... 10

6) − 4288
      4288 ... 8

7) 0 2478

\+



1) Делитель — трехзначное число, поэтому отчеркнем в начале делимого трехзначное число — это 132, что меньше делителя. Тогда добавим еще очередную цифру делимого и получим число 1328, что больше делителя, даже удвоенного. Удваиваем делитель (к делителю прибавляем еще такое же число) и подписываем этот результат под 1328, выполняем вычитание. Остаток получился меньше делителя. Подсчитав разряды, выясняем, что получили в частном 2 тысячи.

2) Из делимого сносим очередную цифру 2, получим 2562, что больше чем в 2 раза уже удвоенного делителя. Вот поэтому еще раз удваиваем уже удвоенный делитель и подписываем под 2562. Вычитаем, получаем 418, что меньше делителя. Значит, в частном будет только 4 сотни.

3) Сносим очередную цифру делимого, получаем 4180. Это больше учетверенного делителя. Подписываем под 4180 учетверенный делитель 2144, вычитаем, получаем 20 366, в частном записываем 4 десятка.

4) Обнаруживаем, что 2036 еще достаточно, чтобы в частном получить еще 2 десятка. Под 2036 подписываем удвоенный делитель, вычитаем, получаем 964. В частном записываем 2 десятка.

5) Остатка достаточно, чтобы в частном получить еще 1 десяток. Под 964 подписываем делитель, вычитаем, получаем 428, в ча-

стном записываем 1 десяток. Остаток 428 меньше делителя, значит, в частном еще десятков не получим.

6) Сносим последнюю цифру делимого 8, получаем 4288. Возникает предположение, что это не меньше удвоенного учетверенного делителя. Проверяем: 2144 + 2144 = 4288. Значит, в частном получаем 4 + 4 = 8 единиц.

7) Суммируем все частные и получаем полное частное 2478.

Проверьте полученный результат с помощью привычного приема деления или с помощью вычислительных средств.

Вычислите этим способом:

5 910 996 : 273; 2 574 144 : 436; 65 925 568 : 3214.

И опять же, как и в случае умножения, по тем же причинам мы не находим достаточных оснований, чтобы приведенный прием деления считать непрактичным. Непривычность этого приема деления не является достаточным основанием для заключения о его непригодности.

2.8. Умножение «крестом»

37. а) Двузначное число можно умножить на двузначное особым способом, как раньше называли, — «крестом». Этот прием особенно выгоден, когда перемножаемые числа немного меньше 100 или хотя бы одно из них близко к 100.

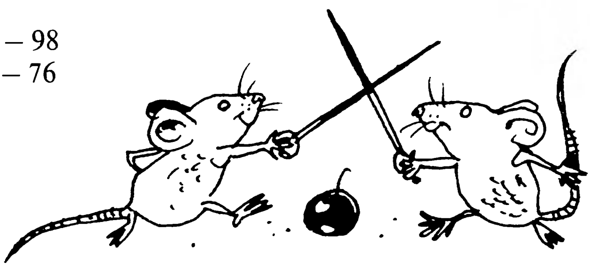
Пусть надо умножить 98 • 76.

Напишите эти числа друг под другом, а рядом их дополнения до 100. Вычтите из первого множителя дополнение второго или из второго множителя дополнение первого (между прочим, эти разности равны). Эти вычисления показаны стрелками, они образовали «крест», поэтому и прием так назван. Полученная разность — это количество сотен, которое содержит искомое произведение. Теперь перемножьте дополнения и это произведение прибавьте к уже полученным сотням. Результат готов. Заметим, что произведение дополнений может оказаться больше 100, тогда сотни этого результата отнесите к сотням окончательного произведения.

98 − 2 = 100 − 98
76 − 24 = 100 − 76 ×

74 сот. + 48

7448



Вычислите произведения с помощью этого приема:

$97 \cdot 85$; $\quad 99 \cdot 64$; $\quad 96 \cdot 83$;
$95 \cdot 78$; $\quad 94 \cdot 87$; $\quad 98 \cdot 73$.

Обоснуйте этот прием.

В рассмотренном случае умножения двузначных чисел при отыскании сотен произведения можно было это сделать не с помощью вычитания из множителя дополнения другого множителя, а сложить дополнения и вычесть их из 100. Так, в рассмотренном примере $2 + 24 = 26$, $100 - 26 = 74$. Проверьте это.

б) Перемножать «крестом» можно и однозначные числа, но тогда дополнения надо брать до 10, а вычитание из одного сомножителя дополнения другого или сложение дополнений дает десятки искомого произведения.

$$\begin{array}{lll} 7 \; - \; 3 & \downarrow\times & = 10 - 7 \\ 8 \; - \; 2 & & = 10 - 8 \\ \hline \text{5 дес.} + 6 & & \\ \hline 56 & & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 6 \; - \; 4 & \downarrow\times & = 10 - 6 \\ 9 \; - \; 1 & & = 10 - 9 \\ \hline \text{5 дес.} + 4 & & \\ \hline 54 & & \end{array}$$

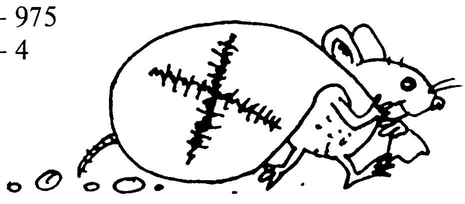
Составьте свои примеры.

в) С помощью этого приема можно перемножать, конечно, трехзначные, четырехзначные и т. д. числа. Но тогда придется брать дополнения сомножителей соответственно до 1000, до 10 000 и т. д.

Например:

$$\begin{array}{lll} 974 \; - \; 26 & \downarrow\times & = 1000 - 974 \\ 997 \; - \; 3 & & = 1000 - 997 \\ \hline 971 \cdot 10^3 + 78 & & \\ \hline 971\,078 & & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 875 \; - \; 125 & \downarrow\times & = 1000 - 875 \\ 992 \; - \; 8 & & = 1000 - 992 \\ \hline 867 \cdot 10^3 + 1000 & & \\ \hline 868\,000 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 975 \; - \; 25 & \downarrow\times & = 1000 - 975 \\ 996 \; - \; 4 & & = 1000 - 4 \\ \hline 971\,100 & & \end{array}$$



$$\begin{array}{llcll} 957 & - & 43 & \times & = 100 - 957 \\ 993 & - & 7 & & = 1000 - 993 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{950 \cdot 10^3 + 301} \\ \hline \multicolumn{5}{l}{950\,301} \end{array} \qquad \begin{array}{llcll} 923 & - & 77 & \times & = 1000 - 923 \\ 987 & - & 13 & & = 1000 - 987 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{910 \cdot 10^3 + 1001} \\ \hline \multicolumn{5}{l}{911\,001} \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} 909 & - & 91 & \times & = 1000 - 909 \\ 989 & - & 11 & & = 1000 - 989 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{898 \cdot 10^3 + 1001} \\ \hline \multicolumn{5}{l}{899\,001} \end{array} \qquad \begin{array}{llcll} 5875 & - & 4125 & \times & = 10\,000 - 5875 \\ 9992 & - & 8 & & = 10\,000 - 9992 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{5867 \cdot 10^4 + 33\,000} \\ \hline \multicolumn{5}{l}{58\,703\,000} \end{array}$$

Выполните умножение «крестом»:

$878 \cdot 996$; $789 \cdot 994$; $867 \cdot 998$; $756 \cdot 997$;
$884 \cdot 999$; $8785 \cdot 9998$; $8976 \cdot 9997$; $6328 \cdot 9999$.

г) Рассмотрите этот случай умножения «крестом» в общем виде, это и будет его обоснованием. Для этого возьмите числа a и b, имеющие по n цифр, а их дополнениями пусть будут соответственно α и β.

д) Мы рассмотрели умножение «крестом», когда оба сомножителя меньше некоторой степени 10, назовем эти множители с «недостатком». А ведь могут быть оба множителя чуть больше некоторой степени 10, т. е. с «избытком». Тогда все операции ведутся аналогично, но если раньше из одного множителя вычитали дополнения другого множителя, то теперь надо выполнять сложение, а можно «дополнения» — «избыток» сложить и прибавить к соответствующей степени десяти и таким образом найти начало искомого произведения. А можно ничего не менять, а лишь писать «избытки» со знаком минус, и тогда сам процесс вычисления внесет поправки.

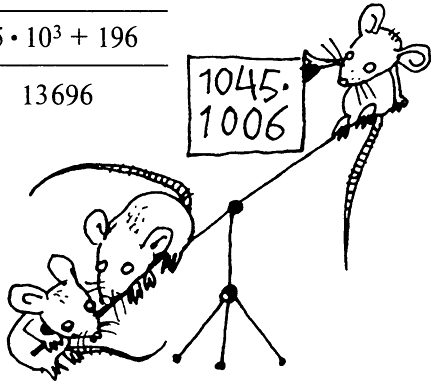
Например:

$$\begin{array}{llcll} 1023 & + & 23 & \times & = 1028 - 1000 \\ 1004 & + & 4 & & = 1004 - 1000 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{1027 \cdot 10^3 + 92} \\ \hline \multicolumn{5}{l}{1\,027\,092} \end{array} \qquad \begin{array}{llcll} 1023 & - & -23 & \times & = 1023 - 1000 \\ 1004 & - & -4 & & = 1004 - 1000 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{(1004 - (-23)) \cdot 10^3 + (-23) \cdot (-4)} \\ \hline \multicolumn{5}{l}{1\,027\,092} \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} 1125 & + & 125 & \times & = 1125 - 1000 \\ 1008 & + & 8 & & = 1008 - 1000 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{1133 \cdot 10^3 + 1000} \\ \hline \multicolumn{5}{l}{1\,134\,000} \end{array} \qquad \begin{array}{llcll} 10037 & + & 37 & \times & = 10\,037 - 1000 \\ 1003 & + & 3 & & = 1003 - 1000 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{1040 \cdot 10^3 + 11} \\ \hline \multicolumn{5}{l}{1\,040\,111} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcrcl} 137 & + & 37 & \downarrow\times & = 137-100 \\ 103 & + & 3 & & = 103-100 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{140\cdot 10^3+111} \\ \hline \multicolumn{5}{c}{141111} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcrcl} 128 & + & 28 & \downarrow\times & = 128-100 \\ 107 & + & 7 & & = 107-100 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{135\cdot 10^3+196} \\ \hline \multicolumn{5}{c}{13696} \end{array}$$



$$\begin{array}{lcrcl} 14 & + & 4 & \downarrow\times & = 14-10 \\ 13 & + & 3 & & = 13-10 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{17\cdot 10+12} \\ \hline \multicolumn{5}{c}{182} \end{array}$$

Вычислите:

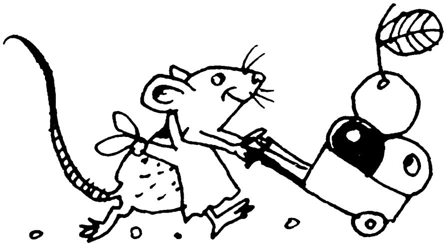
$1045 \cdot 1006$; $1075 \cdot 1008$;
$109 \cdot 112$; $127 \cdot 106$.

е) Может быть и так, что один сомножитель с «избытком», а другой с «недостатком». В таком случае при нахождении первой части искомого произведения или найти разность большего множителя и «недостатка» меньшего множителя, или сумму меньшего множителя и «избытка» большего множителя (а можно найти сумму 10^n и разности «избытка» и разности «избытка» и «недостатка», причем она может быть как положительной, так и отрицательной, а то и равна нулю, когда «избыток» равен «недостатку»), а при отыскании второй части искомого окончательного результата произведение «избытка» и «недостатка» не прибавляется к первой части этого результата, а вычитается.

$$\begin{array}{lcrcl} 113 & + & 13 & \downarrow\times & = 113-1000 \\ 94 & - & 6 & & = 100-94 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{(113-6)\cdot 10^2-13\cdot 6,\text{ или}} \\ \multicolumn{5}{l}{(94+13)\cdot 10^2-13\cdot 6,\text{ или}} \\ \multicolumn{5}{l}{(100+(13-6))\cdot 10^2-13\cdot 6} \\ \hline \multicolumn{5}{c}{10\,622} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcrcl} 125 & + & 25 & \downarrow\times & = 125-100 \\ 96 & - & 4 & & = 100-96 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{(125-4\ \cdot 10^2-25\cdot\ 4} \\ \multicolumn{5}{l}{(96+25)\cdot 10^2-25\cdot 4} \\ \multicolumn{5}{l}{(100-(25-4))\cdot 10^2-25\cdot 4} \\ \hline \multicolumn{5}{c}{12\,000} \end{array}$$

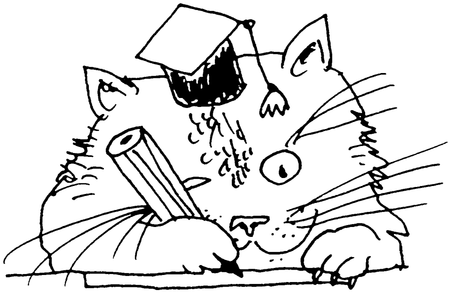
$$\begin{array}{lcrcl} 137 & + & 37 & \downarrow\times & = 137-100 \\ 97 & - & 3 & & = 100-97 \\ \hline \multicolumn{5}{l}{(137-3)\cdot 10^2-37\cdot 3} \\ \multicolumn{5}{l}{(97+37)\cdot 10^2-37\cdot 3} \\ \multicolumn{5}{l}{(100-(37-31))\cdot 10^2-37\cdot 3} \\ \hline \multicolumn{5}{c}{13\,289} \end{array}$$



$$\begin{array}{llll} 1143 & \overset{+}{\times} & 143 & = 1143 - 1000 \\ 993 & - & 7 & = 1000 - 993 \\ \hline \multicolumn{4}{l}{1136 \cdot 10^3 - 1001} \\ \hline \multicolumn{4}{l}{1\,134\,999} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 1008 & \overset{+}{\times} & 8 & = 1008 - 1000 \\ 875 & - & 125 & = 1000 - 875 \\ \hline \multicolumn{4}{l}{883 \cdot 10^3 - 125 \cdot 8} \\ \hline \multicolumn{4}{l}{882\,000} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 1011 & \overset{+}{\times} & 11 & = 1011 - 1000 \\ 909 & - & 91 & = 1000 - 909 \\ \hline \multicolumn{4}{l}{920 \cdot 10^3 - 1001} \\ \hline \multicolumn{4}{l}{918\,999} \end{array}$$



Вычислите:

$1037 \cdot 997$; $\quad 1125 \cdot 992$;

$1016 \cdot 975$; $\quad 108 \cdot 75$.

ж) Перемножать числа «крестом» легко и просто, когда одно из них на сколько-то больше круглого числа, а другое — на столько же меньше этого же круглого числа. В этом случае тоже по одной «диагонали-стрелке» берется сумма, а по другой — разность, а квадрат «избытка» — «недостатка» вычитается.

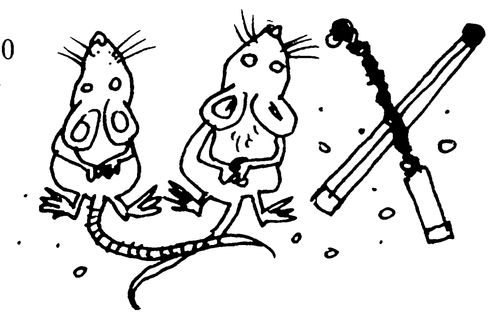
$$\begin{array}{llll} 47 & \overset{-}{\times} & 3 & = 50 - 47 \\ 53 & + & 3 & = 53 - 50 \\ \hline \multicolumn{4}{l}{50 \cdot 3^3} \\ \hline \multicolumn{4}{l}{2491} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 387 & \overset{-}{\times} & 13 & = 400 - 387 \\ 413 & + & 13 & = 413 - 400 \\ \hline \multicolumn{4}{l}{400 \cdot 400 - 13^2} \\ \hline \multicolumn{4}{l}{159\,831} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 715 & \overset{-}{\times} & 15 & = 715 - 700 \\ 685 & + & 15 & = 700 - 685 \\ \hline \multicolumn{4}{l}{700 \cdot 700 - 15^2} \\ \hline \multicolumn{4}{l}{489\,775} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 105 & \overset{+}{\times} & 5 & = 105 - 100 \\ 95 & - & 5 & = 100 - 95 \\ \hline \multicolumn{4}{l}{100 \cdot 10^2 - 5 \cdot 5} \\ \hline \multicolumn{4}{l}{9975} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 1026 & \overset{+}{\times} & 26 & = 1008 - 1000 \\ 974 & - & 26 & = 1000 - 974 \\ \hline \multicolumn{4}{l}{1000 \cdot 10^3 - 26^2} \\ \hline \multicolumn{4}{l}{999\,324} \end{array}$$



Вычислите:

$37 \cdot 43; \quad 86 \cdot 94; \quad 286 \cdot 314; \quad 598 \cdot 602.$

з) Умножение «крестом» можно применять при возведении чисел в квадрат. В таком случае следует взять по одной «диагонали» сумму множителя и дополнения, а по другой – разность и их перемножить, а потом прибавить квадрат дополнения.

$$48^2$$

$$\begin{array}{lcl} 48 & + & 2 \\ 48 & - & 2 \\ \hline \multicolumn{3}{l}{50 \cdot 46 + 2^2} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{2304} \end{array} \quad \downarrow \times = 50 - 48$$

$$389^2$$

$$\begin{array}{lcl} 389 & + & 11 \\ 389 & - & 11 \\ \hline \multicolumn{3}{l}{400 \cdot 378 + 11^2} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{151\,321} \end{array} \quad \downarrow \times = 400 - 389$$

$$67^2$$

$$\begin{array}{lcl} 67 & + & 3 \\ 67 & - & 3 \\ \hline \multicolumn{3}{l}{70 \cdot 64 + 3^2} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{4489} \end{array} \quad \downarrow \times = 70 - 67$$

Вычислите:

$32^2; \quad 74^2; \quad 81^2; \quad 96^2; \quad 285^2; \quad 392^2.$

и) Умножение «крестом» можно применять и при умножении дробных чисел.

$$\begin{array}{lcll} 7\frac{5}{6} & - & 2\frac{1}{6} & = 10 - 7\frac{5}{6} \\ 8\frac{2}{3} & - & \frac{1}{3} & = 10 - 8\frac{2}{3} \\ \hline \multicolumn{3}{l}{6\frac{1}{2}\text{ дес.} + \frac{13}{6} \cdot \frac{4}{3}} & \\ \hline \multicolumn{3}{l}{65 + 2\frac{8}{9} = 67\frac{8}{9}} & \end{array} \quad \downarrow \times$$

$$\begin{array}{lcll} 6\frac{3}{7} & + & \frac{3}{7} & = 6\frac{3}{7} - 6 \\ 5\frac{4}{7} & - & \frac{3}{7} & = 6 - 5\frac{4}{7} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{6 \cdot 6 - \left(\frac{3}{7}\right)^2} & \\ \hline \multicolumn{3}{l}{36 - \frac{9}{49} = 35\frac{40}{49}} & \end{array} \quad \downarrow \times$$

$$\begin{array}{lcll} 9{,}25 & - & 0{,}75 & = 10 - 9{,}25 \\ 8{,}7 & - & 1{,}3 & = 10 - 8{,}7 \\ \hline \multicolumn{3}{l}{7{,}95 \cdot 10 + 0{,}75 \cdot 1{,}3} & \\ \hline \multicolumn{3}{l}{79{,}5 + 0{,}975 = 80{,}475} & \end{array} \quad \downarrow \times$$

Как видим, умножение «крестом» можно применять во многих случаях, но выгодно это делать, когда дополнения множителей или невелики, или с ними легко выполняются сложение, вычитание и умножение.

3 Вычислительные средства прошлых лет

Мы рассмотрели разнообразные способы и приемы выполнения вычислений. Теперь, наверное, небезынтересно, хотя бы очень кратко, познакомиться с теми вычислительными приспособлениями и устройствами, которые применялись в давние и не столь давние времена.

В наше время самым распространенным и наиболее эффективным вычислительным устройством стал калькулятор. Он настойчиво и стремительно вытеснил из нашего обихода почти все ранее применявшиеся средства, с помощью которых выполнялись вычисления, хотя многие из них были простыми по устройству и по способам работы с ними. Это всевозможные и разнообразные вычислительные таблицы и справочники, логарифмические линейки, русские счеты, арифмометры и т. п.

Конечно, калькулятор выполняет вычисления быстро и надежно. Однако многие применявшиеся ранее вычислительные средства вызывают интерес или тем, что они могут быть изготовлены любым и каждым, или тем, что способы и приемы работы с ними занимательны и поучительны. Во всяком случае, эти вычислительные средства заслуживают того, чтобы о них время от времени вспоминать, так как они способствуют развитию интереса к вычислениям, творчества и смекалки.

3.1. Вычислительные таблицы

Первая учебная печатная книга по математике, предложенная Копиевским для российских школ, фактически была не чем иным, как сборником таблиц умножения однозначных и двузначных чисел. Само по себе это пособие было крайне неудачным и большого распространения не получило. Первым русским печатным учебником по математике считается замечательная «Арифметика, сиречь наука числительная» Леонтия Филипповича Магницкого (1703). В этом уникальном пособии энциклопедического характера, кроме разнообразного учебного материала, еще приводится много вычислительных таблиц, которые необходимы были для обучения, а также и такие таблицы, которые с успехом применялись в финансовых делах, в технических расчетах, в навигационных вопросах и т. п.

В дальнейшем вычислительные таблицы выделились из учебной литературы и получили самостоятельное существование. В современном обучении математике широко применяются «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса. До появления калькуляторов они были непременным и незаменимым спутником каждого учащегося средней школы и студента института. Эти таблицы позволяют находить: точные произведения двузначных чисел, значения дробей вида $1/n$, где $n \in N$, квадраты и кубы двузначных чисел, квадратные корни, длины окружностей и площади кругов заданного диаметра, значения тригонометрических функций, радианные меры углов, мантиссы десятичных логарифмов и антилогарифмы, логарифмы тригонометрических функций, натуральные логарифмы двузначных чисел, биномиальные коэффициенты при $n \leqslant 15$ ($n \in N$), корни уравнений $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$, $z^2 + pz + q = 0$ с помощью номограмм.

Не станем рассматривать способы и приемы работы со всякими готовыми вычислительными таблицами (в каждом таком пособии даются полные объяснения, как пользоваться таблицами), а составим свои простейшие таблицы и найдем им применение.

3.1.1. Таблицы сложения однозначных натуральных чисел

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

38. Начертите квадрат 10×10 см и разграфите его на 100 клеток. Пронумеруйте столбцы и строки, считая левую верхнюю клетку нулевой. Складывайте номер столбца с номером строки и записывайте полученный результат на их пересечении. Таблица готова, а заодно мы установили способ ее использования для сложения однозначных натуральных чисел. Например, $6 + 7$. Надо идти по шестой строке, пока не придем в седьмой столбец, там и прочитаем сумму 13. Или спускаться в шестом столбце, пока не окажемся в седьмой строке, там прочтем сумму 13. Конечно, слагаемые можно поменять местами и проделать описанные операции.

Эту же таблицу можно использовать для вычитания однозначного числа из однозначного или из двузначного, меньшего 18. Например, $12 - 5$. Идем по пятой строке (вычитаемое 5), пока не придем в клетку с числом 12 (это уменьшаемое), поднимаемся по этому столбцу вверх, т. е. выясняем его номер — это и есть искомая разность 7. А можно в пятом столбце опускаться до клетки с числом 12 и пойти по этой строке влево, т. е. выяснить номер строки — это и будет искомая разность 7.

Если уменьшаемое больше 18, то его всегда можно представить в виде суммы, у которой одно слагаемое более или равно вычитаемому, но менее или равно 18, а другое слагаемое — остальная часть уменьшаемого, причем это круглые десятки. Например, $62 - 8 = (50 + 12) - 8 = 50 + (12 - 8) = 50 + 4 = 54$.

Так как сложение многозначных чисел фактически сводится к сложению однозначных чисел каждого разряда, то составленная нами таблица найдет применение и в этом случае.

Например, $758 + 684$.

$8 + 4 = 12 = 1$ дес. 2 ед., 2 единицы записываем в ответ, а 1 десяток прибавляем сразу к десяткам одного из слагаемых (5 дес. + 1 дес.) + 8 дес. = 6 дес. + 8 дес. = 14 дес. = 1 сот. 4 дес. Также 4 десятка записываем в результат, а 1 сотню прибавляем к сотням одного из слагаемых (7 сот. + 1 сот.) + 6 сот. = 14 сот. = = 1 тыс. 4 сот.

Итак, $758 + 684 = 1442$.

3.1.2. Таблица Пифагора и ее разновидность

39. По образу и подобию таблицы сложения и вычитания однозначных натуральных чисел можно построить таблицу умножения и деления этих чисел. Такая таблица известна как таблица Пифагора. Постройте и примените ее.

Рассматривая таблицу Пифагора, можно выполнить ряд интересных исследований.

а) Сложите числа каждой строки, а потом сложите числа каждого столбца. Сравните результат каждой строки (столбца) с суммой чисел первой строки (столбца). Можно ли, имея сумму чисел первой строки, получить с помощью умножения сумму чисел любой другой строки (столбца), зная их номер? Как это объяснить?

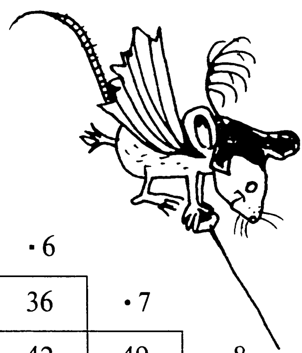
б) Если идти по какой-либо строке до пересечения со столбцом этого же номера и подниматься вверх, то получается некоторый «коридор», заполненный числами. Он называется *гномоном*. Сложите числа каждого гномона. Сравните эти суммы с номером соответствующего гномона. Объясните эту закономерность.

в) В таблице первый квадратик с вершиной в левом верхнем углу занимает единица. Присоедините к нему гномон с числами 2, 4, 2. Получился второй квадрат. Найдите сумму чисел, заполняющих этот квадрат. Образуйте таким способом третий квадрат, т. е. присоедините еще третий гномон. Подсчитайте сумму чисел в третьем квадрате.

Образуйте остальные аналогичные квадраты и подсчитайте суммы чисел, заполняющих эти квадраты. Какую вы заметили закономерность?

40. Таблица Яна Видмана. Она была известна еще в 1489 г. и имела некоторое распространение. По сути, это разновидность таблицы Пифагора. В ней записаны неповторяющиеся табличные произведения.

1	• 2							
2	4	• 3						
3	6	9	• 4					
4	8	12	16	• 5				
5	10	15	20	25	• 6			
6	12	18	24	30	36	• 7		
7	14	21	28	35	42	49	• 8	
8	16	24	32	40	48	56	64	• 9
9	18	27	36	45	54	63	72	81



Здесь так же, как и в таблице Пифагора, результаты умножения однозначных чисел находятся на пересечении соответствующих строк и столбцов. Эту таблицу тоже можно использовать в случае табличного деления.

Например, 56 : 7. Делитель 7 сразу указывает, что делимое следует искать в седьмом столбце. Найдя там 56, надо идти влево по строке, выяснив ее номер, это и будет частным 56 : 7 = 8. Поупражняйтесь в применении этой таблицы.

3.2. Инструментальные вычисления

3.2.1. Природный «калькулятор»

41. а) Удивительно, что у нас у каждого постоянно имеется при себе простейший природный «калькулятор», которым можно пользоваться, — это пальцы рук. Еще в раннем детстве, когда учились складывать и вычитать однозначные числа, мы частенько использовали этот природой данный счетный инструмент. Но пальцы рук помогут и перемножать однозначные числа. Рассмотрим сначала случай умножения однозначных чисел на 9.

Пусть надо умножить 4 на 9. Положите на стол обе руки ладонями вниз. Мы умножаем 4, поэтому подогните четвертый палец, и результат готов: число пальцев до загнутого пальца составляет число десятков искомого произведения, а число пальцев после подогнутого пальца — это единицы произведения: $4 \cdot 9 = 36$ (рис. 1).

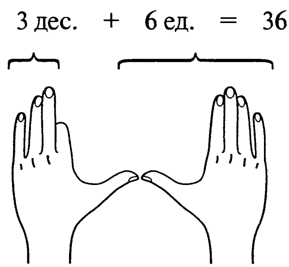


Рис. 1

Вычислите с помощью этого «калькулятора» все остальные случаи умножения однозначных чисел на 9. Взамен пальцев можно применить 10 палочек или иных предметов (карандашей, полосок, спичек и т. д.). Пусть надо 6 умножить на 9. Разложите в один ряд 10 палочек. Мы умножаем на 9 лишь 6, поэтому шестую палочку сдвиньте вниз (или вообще уберите). Результат готов: до сдвинутой палочки – десятки, а после нее показаны единицы произведения. Значит, $6 \cdot 9 = 54$.

Попробуйте объяснить этот прием умножения однозначных чисел на 9.

б) Этим же «счетным прибором» можно воспользоваться и при делении двузначных чисел на 9, если они делятся на 9 без остатка.

Пусть надо 63 разделить на 9. Покажите это число на пальцах, как это получалось при умножении на 9. Сосчитайте слева направо пальцы до загнутого и прибавьте загнутый палец — это и есть искомое частное.

Поупражняйтесь в таком делении.

в) Умножать и делить на 9 можно и без пальцев. Например, $7 \cdot 9$: 1) напишите цифру, на 1 меньше умножаемого многозначного числа (в нашем случае $7 - 1 = 6$), получили десятки искомого произведения; 2) припишите к десяткам дополнение уже полученного числа 6 до 9, т. е. $9 - 6 = 3$ — это единицы; 3) результат: $7 \cdot 9 = 63$.

Деление двузначного числа на 9: 1) проверьте, делится ли предложенное число на 9 (его сумма цифр должна быть равна 9); 2) отбросьте цифру единиц делимого, а к полученному таким образом числу прибавьте 1; 3) результат готов.

Например:

$72 : 9$ $(7 + 2 = 9)$;

1) 7; 2) $7 + 1 = 8$; 3) $72 : 9 = 8$;

$36 : 9$ $(3 + 6 = 9)$;

1) 3; 2) $3 + 1 = 4$; 3) $36 : 9 = 4$.

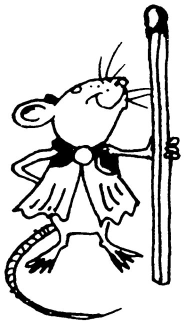
Поупражняйтесь в таком умножении и делении.

г) Немного потруднее, но можно на пальцах выполнять умножение однозначных натуральных чисел, больших 5 (для чисел от 5 и меньше этот прием неприменим). Покажите на одной руке, на сколько первый сомножитель больше 5 («лишние» пальцы пригните), а на другой то же сделайте относительно второго сомножителя. Прямые пальцы обеих рук сложите — это число десятков искомого произведения. Пригнутые пальцы той и другой руки перемножьте — это единицы произведения. Сложите полученные числа, и результат готов.

Например, $7 \cdot 6$. Семь больше 5 на 2 (два пальца выставили, а три пригибаем). Шесть больше 5 на 1 (один палец выставляем, а четыре пригибаем). Складываем $2 + 1 = 3$ — это число десятков искомого произведения. На одной руке мы пригнули 3 пальца, а на другой — 4. Перемножим эти числа: $3 \cdot 4 = 12$ — это надо добавить к десяткам. Получаем 3 дес. + 12 = 42. Итак, $7 \cdot 6 = 42$.

Этот прием применим и тогда, когда один из сомножителей равен 9. Опять же вместо пальцев можно применить палочки или иные предметы.

Положите по отдельности два пятка палочек (рис. 2). Найдем $8 \cdot 7$. С помощью одного пятка покажем, на сколько 8 больше



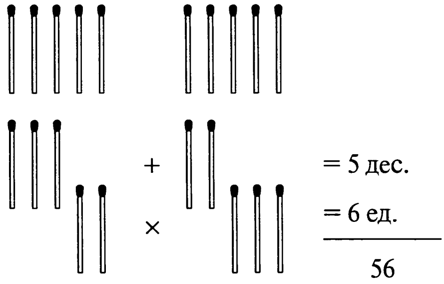


Рис. 2

5, а с помощью другого — на сколько 7 больше 5, для чего сдвинем вниз в одном случае 2 палочки, а в другом — 3 палочки.

Сложим палочки верхнего ряда 3 + 2 = 5 — это десятки искомого произведения. Перемножим числа палочек нижнего ряда 2 • 3 = 6 — это единицы произведения. Найдем сумму этих чисел 5 дес. + 6 ед. = = 56.

Обоснуйте этот прием умножения. Поупражняйтесь в его применении.

3.2.2. Сложение и вычитание на линейках и дисках

42. Наипростейший счетный прибор может изготовить каждый школьник. Стоит взять две полоски-линейки (деревянные или картонные), разделить на 20 равных частей у одной из них левую кромку, а у другой — правую, пронумеровать полученные деления, и арифметическая счетная линейка готова (рис. 3). Этот прибор является отдаленным прообразом когда-то очень распространенной логарифмической линейки.

С помощью полученного простенького счетного устройства легко выполняются сложение и вычитание однозначных натуральных чисел. Например, 8 + 7.

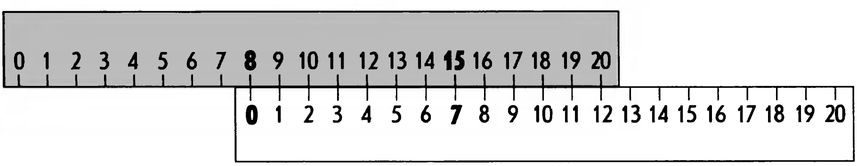


Рис. 3

Надо линейки приложить друг к другу так, чтобы окончание одного слагаемого (оно находится на первой линейке), в нашем случае — 8, совпадало с началом другого слагаемого (оно находится на второй линейке). Остается теперь только прочитать полученную сумму, она находится на первой линейке и расположена против окончания второго слагаемого 7. Читаем — 15. Итак, 8 + 7 = 15.

Кстати, мы заодно нашли суммы 8 + 8 = 16, 8 + 9 = 17, 8 + 10 = = 18, 8 + 11 = 19, 8 + 12 = 20.

Сложение многозначных чисел фактически сводится к сложению однозначных чисел, а поэтому описанное устройство может быть применено во всех случаях сложения чисел.

Похожим образом выполняется на линейках и вычитание в пределах 20, только некоторые операции проделываются в обратном порядке.

Например, 13 – 8. Надо на первой линейке зафиксировать уменьшаемое (13). К его окончанию приложить окончание вычитаемого, изображенного на другой линейке (8). Теперь остается прочитать разность, она находится на первой линейке напротив начала второй линейки (5) (рис. 4). Итак, 13 – 8 = 5.

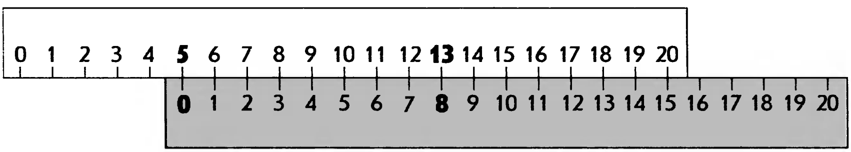


Рис. 4

Кстати, заодно мы нашли и разность 6 – 1 = 5, 7 – 2 = 5, 8 – 3 = = 5, ..., 20 – 15 = 5.

Рассмотренное устройство получится более удобным, если взять деревянный брусок, разделить его продольно пополам, выбрать пазы и в этом углублении поместить линейку, которая могла бы двигаться в образовавшихся пазах. Получается нечто похожее на старый пенал, каким пользовались ваши родители (рис. 5).

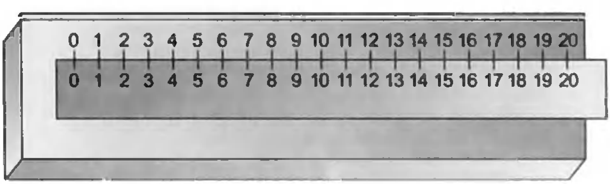


Рис. 5

Нанесите необходимые деления на подвижную и неподвижную кромки линейки, и устройство готово.

Конечно, если изготовить линейку, содержащую 200 делений, то с помощью такого устройства можно было бы складывать и вычитать любые однозначные и двузначные числа, но это устройство было бы громоздким. Чтобы устранить этот недостаток, можно вместо линеек использовать концентрические диски (круги).

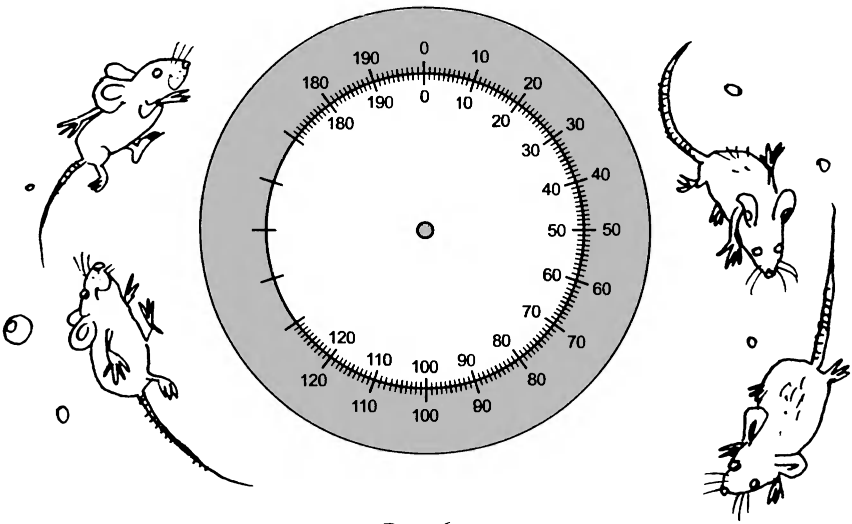


Рис. 6

43. Возьмите два круга (диска) одинаковых радиусов около 20 см, насадите на общую ось, проходящую через их центры, а на ободах (краях кругов, дисков) разместите деления (для этой цели можно взять бумажные ленты, равные длине окружности этих кругов, разделенные на 200 равных частей; пронумеровав деления, надо ленты наклеить на обода кругов).

Другой вариант этого устройства можно получить, если взять два картонных или фанерных круга, причем один из них несколько меньшего диаметра, чем другой. Окружность этих кругов разделить на 200 равных частей ($360^\circ : 200 = 1{,}8^\circ$). Пронумеровать полученные деления. Насадить круги на общую ось, проходящую через центры кругов. Устройство готово (рис. 6).

Принцип работы со всеми этими устройствами один и тот же: он состоит в целесообразном совмещении начал или окончаний заданных компонентов, как это делалось в случае вычисления с линейками.

Конечно, все описанные устройства не универсальны и маломощны, но они просты по своему устройству и применению и могут доставить некоторое удовлетворение при их изготовлении и использовании.

Выполните вычисления, используя описанные устройства.

3.2.3. Палочки Непера

В XVIII в. широко были известны так называемые палочки Непера* и их усовершенствованные варианты, которые применялись для умножения многозначных чисел. Это устройство довольно-таки просто, и изготовить его может абсолютно каждый желающий.

44. Возьмите полоски картона («палочки») размерами примерно 10×1 см или побольше. Каждую из них разделите на 10 одинаковых квадратиков, причем в этих квадратиках, кроме первого, проведите диагонали (рис. 7). В первом верхнем квадратике напишите номер полоски 0, 1, 2, 3, ..., 9 (заметим, что необходимы и нулевые полоски, а также, как потом увидим, надо иметь по нескольку повторяющихся полосок, т. е. с одним и тем же номером). Возьмите полоску любого номера, умножайте этот номер на однозначные натуральные числа подряд, т. е. на 1, 2, 3, ..., 9, а результаты пишите в заготовленные квадратики в должном порядке, пишем число десятков в левом треугольничке и повыше, а единицы — в правом и пониже. Конечно, в нулевой полоске все квадраты будут заполнены только нулями. Потребуется еще полоска с квадратиками без диагоналей, в ней надо написать числа 0, 1, 2, 3, ..., 9. Имея достаточный набор полосок-«палочек», можно умножить многозначные числа на однозначные.

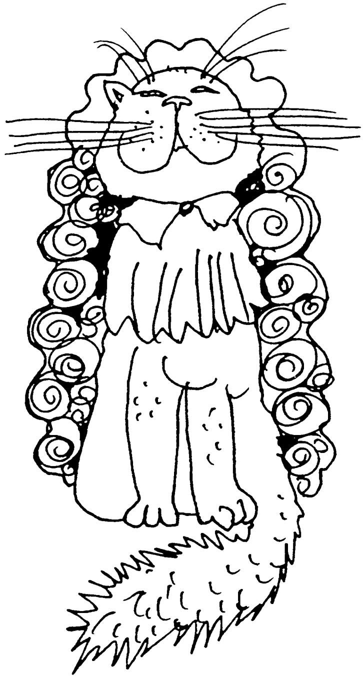
Пусть, например, надо вычислить произведение $4768 \cdot 7$. Берем полоски 4, 7, 6, 8 (цифры множимого) и кладем их рядом друг с другом в порядке цифр множимого, чтобы одноименные строчки совпадали, а впереди кладем полоску с номерами строк. Мы умножаем заданное число на 7, а поэтому идем по седьмой строчке справа налево и суммируем последовательно числа в параллелограммах, составленных из двух соседних треугольников, которые могли соприкасаться катетами, если бы полоски сдвинули вплотную (рис. 8).

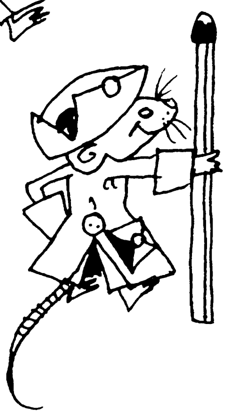
---

* Это вычислительное средство было изобретено шотландским ученым Джоном Непером (1550—1617). Он также известен как основоположник логарифмов.

2	3	5	9	1
0/2	0/3	0/5	0/9	0/1
0/4	0/6	1/0	1/8	0/2
0/6	0/9	1/5	2/7	0/3
0/8	1/2	2/0	3/6	0/4
1/0	1/5	2/5	4/5	0/5
1/2	1/8	3/0	5/4	0/6
1/4	2/1	3/5	6/7	0/7
1/6	2/4	4/0	7/2	0/8
1/8	2/7	4/5	8/1	0/9

Рис.7





№	4	7	6	8
1	0/4	0/7	0/6	0/8
2	0/8	1/4	1/2	1/6
3	1/2	2/1	1/8	2/4
4	1/6	2/8	2/4	3/2
5	2/0	3/5	3/0	4/0
6	2/4	4/2	3/6	4/8
7	2/8	4/9	4/2	5/6
8	3/2	5/6	4/8	6/4
9	3/6	6/3	5/4	7/2

Рис. 8

Получаем:
6 ед.; 5 дес. + 2 дес. = 7 дес.; 4 сот. + 9 сот. = 13 сот. = 1 тыс. 3 сот.;
4 тыс. + 8 тыс. + 1 тыс. = 13 тыс. = 1 дес. тыс. 3 тыс.;
2 дес. тыс. + 1 дес. тыс. = 3 дес. тыс.

Окончательно: 4768 • 7 = 33 376.

Используя эту заготовку, можно также найти произведения 4768 и всех остальных однозначных натуральных чисел.

4768 • 2; 6 ед.; 1 дес. + 2 дес. = 3 дес.; 1 сот. + 4 сот. = 5 сот.; 1 тыс. + + 8 тыс. = 9 тыс.; 4768 • 2 = 9536.

4768 • 3; 4 ед.; 2 дес. + 8 дес. = 10 дес. = 1 сот. 0 дес.; 1 сот. + 1 сот. + + 1 сот. = 3 сот.; 2 тыс. + 2 тыс. = 4 тыс.; 1 дес. тыс.; 4768 • 3 = = 14 304.

4768 • 4; 2 ед.; 3 дес. + 4 дес. = 7 дес.; 2 сот. + 8 сот. = 10 сот. = = 1 тыс. + 0 сот.; 2 тыс. + 6 тыс. + 1 тыс. = 9 тыс.; 1 дес. тыс.; 4768 • 4 = 19 072.

4768 • 5; 0 ед.; 4 дес. + 0 дес. = 4 дес.; 3 сот. + 5 сот. = 8 сот.; 3 тыс. + + 0 тыс. = 3 тыс.; 2 дес. тыс.; 4768 • 5 = 23 840 и т. д.

В рассматриваемом случае умножаемое число в своей записи не имело повторяющихся цифр. Если же в записи множимого окажутся повторяющиеся цифры, то потребовались бы полоски с одинаковым номером. Например, при умножении 54 244 на однозначные числа пришлось бы применить три полоски с четвертым номером, вот поэтому необходимо изготовить набор полосок, состоящий из нескольких одинаковых экземпляров.

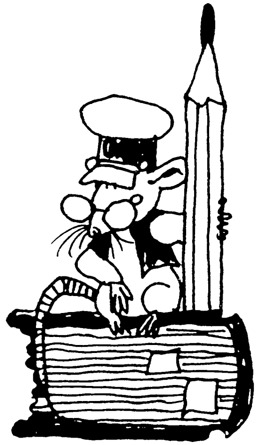
Палочки Непера можно применять и при умножении на двузначные и т. п. числа, но тогда пришлось бы множимое отдельно умножать на единицы, потом на десятки и т. д. второго множителя, а затем сложить полученные частные произведения.

3.2.4. Русские счеты

Совсем недавно (до распространения арифмометров, а потом калькуляторов) русские счеты были главным и очень распространенным вычислительным устройством, применявшимся в быту, в школе, в бухгалтериях, в торговле и т. д.

Кстати, в свое время были такие виртуозы-вычислители на счетах, что они выходили победителями в соревнованиях с вычислителями на арифмометрах.

Отметим также, что достоинства этого замечательного устройства и творческое его использование привлекли внимание великого писателя-классика А. П. Чехова. В рассказе «Репетитор» он описал, как гимназист VII класса не смог решить типовую задачу на предположение ни арифметическими, ни алгебраическими способами, а старый отставной губернский секретарь решил ее на счетах. Задача была такая: «Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 р. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 р. за аршин, а черное — 3 р.».



Эта задача имеет несколько арифметических и алгебраических способов решения, среди них и тот, которым начал было решать ее ученик Петя, а затем и его репетитор.

I способ. Они 540 р. стали делить на 138, но дальше не знали, что делать. Однако, разделив 540 на 138, они бы узнали, во сколько рублей в среднем обошелся аршин сукна: $\frac{540}{138} = 3$ (р.). А это на $5 - 3\frac{21}{23} = 1\frac{2}{23}$ (р.) ниже цены синего сукна и на $3\frac{21}{23} - 3 = \frac{21}{23}$ (р.) выше цены черного. Чтобы найти количества купленного того и другого сукна, надо было бы 138 аршин разделить обратно пропорционально этим разностям, т. е. $\frac{25}{23} : \frac{21}{23} = 25 : 21$. Итак, на 138 аршин приходится $25 + 21 = 46$ условных частей. На одну часть приходится $138 : 46 = 3$ (арш.), тогда синего сукна было $3 \cdot 21 = 63$ (арш.), а черного $3 \cdot 25 = 75$ (арш.).

II способ. а) Если бы было куплено 138 аршин только черного сукна, то пришлось бы заплатить $5 \cdot 138 = 690$ (р.), т. е. на $690 - 540 = 150$ (р.) больше того, что стоила на самом деле покупка. Это произошло потому, что взамен черного сукна покупали бы синее, цена которого на $5 - 3 = 2$ (р.) выше — так и образовалась переплата. Значит, сколько раз в 150 содержится по 2 р., столько аршин и было куплено черного сукна: $150 : 2 = 75$ (арш.), а синего $138 - 75 = 63$ (арш.).

б) Предположим, что куплено 138 аршин только черного сукна, тогда в плане предшествующих рассуждений имеем: $3 \cdot 138 = 414$; $540 - 414 = 126$; $5 - 3 = 2$; $126 : 2 = 63$; $138 - 63 = 75$.

III способ. а) Куплено x аршин черного сукна, тогда синего куплено $(138 - x)$ (арш). За черное сукно уплатили $3x$ (р.), а за синее — $5(138 - x)$ (р). Вся покупка стоила $(3x + 5(138 - x))$ (р.), а это по условию задачи 540 (р.). Получаем уравнение $3x + 5(138 - x) = 540$. Решив его, имеем $x = 75$ — столько аршин купили черного сукна, а синего $138 - 75 = 63$ (арш.).

б) За x принято число аршин синего сукна. Тогда будем иметь уравнение: $3(138 - x) + 5x = 540$, $x = 63$, $138 - 63 = 75$.

IV способ. а) Куплено x аршин черного и y аршин синего сукна, тогда $x + y = 138$ (арш.). За черное сукно заплатили $3x$ (р.), а за синее — $5y$ (р.). Вся покупка стоила $(3x + 5y)$ (р.), но это по условию задачи 540(р.). Значит, $3x + 5y = 540$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 138, \\ 3x + 5y = 540. \end{cases} \quad \text{Решив ее, имеем:} \quad \begin{cases} x = 75, \\ y = 63. \end{cases}$$

б) То же, но x аршин — синего сукна, y аршин — черного. Система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 138, \\ 5x + 3y = 540. \end{cases} \quad \text{В результате имеем:} \quad \begin{cases} x = 63, \\ y = 75. \end{cases}$$

Отец ученика Пети, решая эту задачу на счетах, конечно, рассуждал в плане II способа, т. е. примерно так: положим, я беру все сукно по 3 р. за аршин, то с меня приходится 414 р. ($138 \cdot 3$). (На счетах это вычисление он мог выполнить следующим способом: 1) по 100 возьмем 3 раза, да еще по 30 приложим 3 раза, ну и по 8 — тоже 3 раза, всего получаем 414; или 2) по 138 надо взять 3 раза, а это $138 + 138 + 138$, причем на счетах он отложит сначала 3 сотни, потом прибавит 9 десятков, наконец, прибавит еще 24 и получит 414. Однако с меня потребовали 540 р., значит, я не досчитался 126 р. ($540 - 414$). Это вышло потому, что было сукно и по 5 р. за аршин, а я все клал по 3 р. и на каждом аршине недоплачивал по 2 р. ($5 - 3$). Выходит, сколько раз в 126 р. содержится по 2 р., столько аршин куплено сукна по 5 р., т. е. синего. Его было 63 аршина ($126 : 2$), а теперь узнаю, сколько я купил черного сукна: $138 - 63 = 75$ (арш.).

Как видим, счеты помогли разрешить вопрос, с которым не справился репетитор.

В специальной литературе* освещается история возникновения и развития идеи устройства русских счетов, подробно рассматриваются способы и приемы работы с ними. Этот счетный прибор прельщает необыкновенной простотой его устройства, особой доступностью изготовления и применения, а также и тем, что он хорошо иллюстрирует многие арифметические свойства чисел и действий над ними. Всем этим и объясняется широкое и длительное использование русских счетов как в обучении, так и при разнообразных практических расчетах. Здесь мы не станем подробно рассматривать всевозможные случаи использования

---

* Иванов М. И. Русские счеты и их использование в школе. — М., 1953; Кононенко А. И. Вычисления на счетах. — М., 1961.

счетов, а также не будем стремиться осветить все обилие приемов и способов работы с ними, а лишь опишем некоторые основные виды таких вычислений.

Счеты может изготовить каждый. Стоит взять несколько проволочек (нитей) одинаковой длины и на каждую из них нанизать по 10 штук шариков (кругляшек-«косточек»). Остается теперь эти проволочки (нити) натянуть параллельно друг другу на какую-то рамку, и счеты готовы (рис. 9). Конечно, «косточки» должны свободно передвигаться по параллелям-проволочкам. А далее начинают действовать принципы десятичной системы счисления, что 10 единиц некоторого разряда составляют одну единицу очередного, более высокого разряда, и наоборот, одна единица какого-либо разряда составляет 10 единиц соседнего низшего разряда; каждая проволочка соответствует только одному разряду систематического числа десятичной системы счисления*.

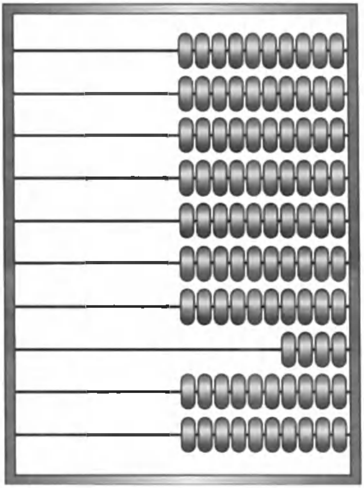


Рис. 9

На этом и основано изображение десятичных систематических чисел на счетах, т. е. нумерация таких чисел на счетах.

Обычно при подготовке счетов к работе все «косточки» сдвигают (сбрасывают) вправо, а потом в левую сторону откладывают заданные компоненты и получают там соответствующие результаты выполняемых действий.

Сложение и вычитание на счетах

45. Всякое сложение больших многозначных чисел, по сути дела, сводится к сложению однозначных чисел. А это подразделяется на два случая: 1) сумма данных однозначных чисел меньше 10 (как говорят, сложение без перехода через десяток); 2) сумма однозначных чисел равна или более 10 (сложение с переходом через десяток). В первом случае сложение на счетах приводит к простому присоединению «косточек» второго слагаемого к «косточкам» первого слагаемого и к прочитыванию полученной суммы. Например, $6 + 3 = 9$.

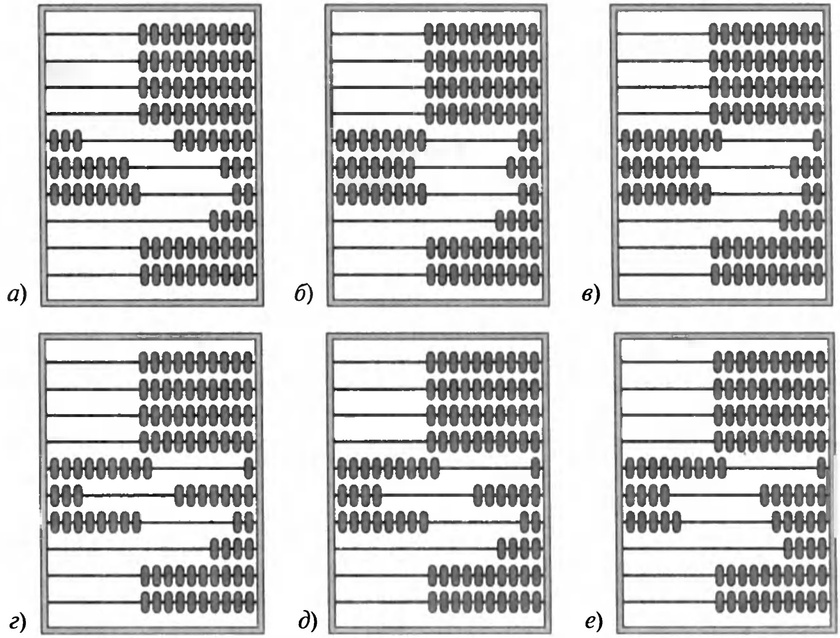
---

* Если на каждую проволочку надеть не по 10 «косточек», а по *K* «косточек», то получим счеты для *K*-й системы счисления, и на них можно хорошо раскрыть вопросы арифметики этой системы.

Если сумма двух однозначных чисел дала 10 «косточек», то ее сбрасывают вправо, но предварительно прибавляют на верхней соседней проволоке 1 «косточку».

Когда сумма двух однозначных чисел оказывается больше 10, то сразу прибавляют единицу следующего, более высокого разряда и затем сбрасывают в нижнем разряде дополнение второго слагаемого до 10. И в самом деле, пусть надо к 6 прибавить 8. Мы сразу прибавим единицу следующего, более высокого разряда, т. е. 10 единиц данного разряда. Значит, тем самым прибавили лишние 2 единицы (дополнение 8 до 10), вот мы и должны сбросить эти 2 лишние единицы. Этим правилам подчиняется сложение единиц любых одноименных разрядов.

Сложение всегда начинают с высших разрядов. Например, 378 + + 567. Откладывают число 378, т. е. сдвигают влево на третьей проволоке 3 «косточки», на второй — 7, на первой — 8 (рис. 10, *а*). К 3 сотням прибавляют 5 сотен, получают 878 (рис. 10, *б*). К 8 сотням прибавляют 1 сотню, так как в очередном нижнем разряде предвидится сумма больше 10. Получается 978 (рис. 10, *в*). Сбрасывают 4 десятка (дополнение 6 до 10). Получается 938 (рис. 10, *г*).



а) *б*) *в*) *г*) *д*) *е*)

Рис. 10

Добавляем 1 десяток, так как в разряде единиц предвидится сумма более 10. Получается 948 (рис. 10, *д*). Остается сбросить 3 единицы (дополнение 7 до 10). Окончательно получаем 945 (рис. 10, *е*).

Таким образом, суть прибавления многозначного числа заключается в том, что, начиная с единиц высшего разряда, складываются единицы одноименных разрядов. Если их сумма предвидится больше 10, то сразу же добавляется единица соседнего более высокого разряда и потом сбрасывается дополнение прибавляемого однозначного числа до 10.

После некоторой тренировки все эти операции (алгоритмы) выполняются быстро и надежно. Одно из достоинств счетов состоит в том, что, как правило, нет надобности держать в памяти компоненты или их части, а также и промежуточные результаты.

Выполните сложение на счетах.

234 + 563;	725 + 164;	517 + 261;	453 + 546;	328 + 460;
753 + 42;	218 + 72;	524 + 283;	356 + 452;	427 + 363;
628 + 247;	84 + 775;	329 + 62;	483 + 375;	547 + 348;
284 + 358;	429 + 473;	735 + 276;	687 + 753;	846 + 479.

Необходимо заметить, что сложение десятичных дробей выполняется по этим же правилам, только надо строго следить за соответствием разрядов складываемых чисел (проволока с 4 «косточками» разделяет целую и дробную части чисел, т. е. выполняет роль запятой). Применимость правил сложения целых чисел к сложению десятичных дробей объясняется тем, что принципы их нумерации одинаковы.

46. Вычитание — действие, обратное сложению, поэтому при выполнении его на счетах наблюдается соответствующая взаимообратность. Здесь тоже можно выделить два основных случая вычитания однозначного числа: 1) когда в одном и том же разряде единиц в уменьшаемом не меньше, чем в вычитаемом; 2) когда их меньше, чем в вычитаемом.

В первом случае просто из уменьшаемого надо изъять столько «косточек», сколько единиц содержит вычитаемое. Во втором случае из очередного верхнего разряда отнимается 1 единица, что соответствует вычитанию 10 единиц нижнего разряда. Но тогда мы вычли лишние единицы, соответствующие дополнению вычитаемого до 10, их надо возвратить, т. е. прибавить к уменьшаемому. Вычитание на счетах, как и сложение, начинают выполнять с наивысшего разряда.

Например, 724 – 287. Сбрасываем все «косточки» вправо (подготовка счетов к работе). Откладываем влево уменьшаемое 724. Вычитаем 2 сотни, получаем 524. В разряде десятков в уменьшаемом только 2, а вычесть надо 8, поэтому сразу вычитают 1 сотню, т. е.

10 десятков, тем самым вычли излишне 2 десятка (дополнение 8 до 10), а поэтому их надо возвратить, прибавив к десяткам 2. Получаем 544. Аналогично поступаем и при вычитании единиц: сбрасываем 1 десяток и возвращаем дополнение 7 до 10, т. е. 3, имеем 537. Как видим, если в случае сложения, предвидя «переход через десяток», мы сразу добавляли 1 единицу в соседнем верхнем разряде и сбрасывали в нижнем разряде дополнение, то теперь поступаем наоборот: в верхнем соседнем разряде вычитаем 1 единицу, а дополнение прибавляем в нижнем разряде.

Иногда «занимание» может оказаться многоступенчатым. Например, $50\,012 - 23\,784 = 30\,012 - 3784 = 27\,012 - 784 = 26\,312 - 84 = 26\,232 - 4 = 26\,228$.

Выполните вычитание на счетах:

679 – 354;	768 – 147;	586 – 364;	478 – 64;	387 – 72;
483 – 375;	528 – 462;	234 – 78;	352 – 87;	615 – 187;
700 – 187;	602 – 156;	410 – 176;	520 – 78;	813 – 268;
614 – 586;	421 – 393;	502 – 487;	345 – 287;	704 – 687.

Как сложение, так и вычитание десятичных дробей тоже выполняется по одинаковым правилам, лишь надо строго следить за соответствием разрядов чисел.

Конечно, и в случае сложения и в случае вычитания на счетах можно и нужно использовать частные свойства чисел, что сокращает вычисления и развивает изобретательность и смекалку. Например:

$5863 + 4996 = 5863 + 5000 - 4 = 10\,859$;
$31\,993 + 52\,998 = 32\,000 + 53\,000 - 7 - 2 = 84\,991$;
$48\,568 + 15\,987 = 49\,555 + 13 + 15\,987 = 49\,555 + 16\,000 = 64\,555$;
$64\,827 - 32\,996 = 64\,827 - 33\,000 + 4 = 64\,831 - 33\,000 = 31\,831$;
$27\,732 - 26\,998 = 27\,732 - 27\,000 + 2 = 734$.

Вычислите:

42 997 + 57 998; 17 563 + 18 996; 31 992 + 54 734; 14 988 + 21 987;
34 843 – 9998; 43 724 – 9997; 57 183 – 46 989; 34 563 – 9998.

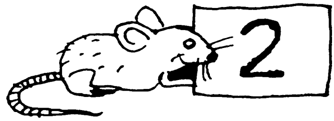
Умножение и деление на счетах

47. Проявляя некоторую изобретательность и выдумку, можно на счетах выполнять умножение и деление.

а) Умножение на 2, 4, 8, ..., 2^n. Если взять какое-либо число a и прибавить к нему такое же число, то получим $a + a = 2a$, т. е. состоится умножение числа a на 2. Ну а если к полученному числу $2a$

прибавить такое же, то $2a + 2a = 4a$ — это уже умножение заданного числа на 4. Так можно продолжать сколь угодно долго, получив умножение числа a на 2^n.

Умножьте числа на степени числа 2:



24;	57;	125;
246;	275;	367.

б) Умножение на 3. Конечно, проще всего отложить умножаемое число, к нему прибавить такое же, а потом прибавить еще раз исходное число, т. е. сложить три исходных числа. А можно к заданному числу прибавить такое же. К полученному результату прибавить этот же результат и из него вычесть исходное число.

Умножьте на 3 числа:

29;	74;	85;
137;	724;	941.

в) Умножение на 5. Так как $5 = 2 + 2 + 1 = 2 \cdot 2 + 1$, то наиболее выгодным способом умножения на 5 окажется тот, когда заданное число удвоим, полученный результат тоже удвоим и прибавим исходное умножаемое число*.

Умножьте на 5 числа:

43;	56;	74;	87;
95;	124;	273;	537.

г) Умножение на 6. Число 6 можно представить как $2 \cdot 2 + 2$, $(2 + 1) \cdot 2$ и т. п. Тогда умножение какого-либо числа на 6 можно выполнить в соответствии с этими представлениями.

Заданное число удвоить, это число записать, полученный удвоенный результат тоже удвоить, а к нему прибавить удвоенное исходное число, и получилось умножение заданного числа на 6.

Во втором случае при умножении заданного числа на 6 сразу его удвоить, к этому результату прибавить исходное число и эту сумму удвоить.

Умножьте на 6 числа:

47;	58;	76;
85;	94;	148.

д) Умножение на 7. Один из способов умножения числа на 7: умножить на 6 и прибавить исходное число. Другой способ: умножить на 8 и вычесть исходное число.

---

* После введения деления на числа на счетах можно будет предложить другой способ умножения на 5.

Умножьте на 7 числа:

24;	36;	48;
79;	143;	526.

е) Умножение на 9. Чтобы заданное число умножить на 9, можно его умножить на 8 и к полученному результату прибавить исходное число. А можно сначала умножить заданное число на 10 и из полученного результата вычесть исходное число.

Умножьте на 9 числа:

34;	47;	76;
83;	124;	315.

ж) Умножение на 10. Чтобы заданное число умножить на 10, достаточно его отложить на один разряд выше разряда простых единиц.

з) Умножение на 11, 12, 13, ... Умножить заданное число на 10 и прибавить множимое 1, 2, 3, ... раза.

и) Умножение на 20, 30, 40, ... Умножить заданное число на 10, а потом полученный результат умножить на 2, 3, 4, ...

к) Умножение на двузначное число. Умножить заданное число на десятки второго сомножителя, а потом прибавить исходное число, умноженное на единицы второго множителя.

л) Умножение на двузначные числа, оканчивающие цифрами 7, 8, 9. Умножить на десятки второго сомножителя, увеличенные на один десяток, а от этого результата отнять исходное число соответственно 3, 2, 1 раза.

Таким образом, можно для каждого множителя подобрать наиболее выгодный прием умножения на него. На практике же чаще всего применяли общие приемы умножения на счетах.

Например, 7234 • 6. Откладываем на счетах множимое 7234. 1) Умножение начинали с высших разрядов. Убираем 7 тысяч и устно их умножаем на 6, получаем 42 тысячи. Откладываем это число на положенном месте. На счетах в этом случае будет значиться 42 234. 2) Убираем 2 сотни. Умножаем устно эти 2 сотни на 6, получаем 12 сот. = 1 тыс. 2 сот. Прибавляем это число к тому, что на это время имеется на счетах: 42 034 + 1 тыс. 2 сот. = 43 234. 3) Убираем 3 десятка, умножаем эти 3 десятка на 6, получаем 18 дес. = 1 сот. 8 дес. Прибавляем это число к тому, что имеется к этому времени на счетах: 43 204 + 1 сот. 8 дес. = 43 384. 4) Наконец, убираем 4 единицы, умножаем их устно на 6, получаем 24 = 2 дес. 4 ед. Прибавляем это число к тому, что есть на счетах: 43 380 + 2 дес. 4 ед. = 43 404 — окончательный результат.

Мы не станем рассматривать умножение на счетах многозначного числа на двухзначное, так как всякое умножение фактически сводится к умножению на однозначное число, да к тому же в наше время это не имеет практического значения, так как калькулятор с такими операциями справляется быстро и надежно при малой затрате времени.

Как в случае сложения и вычитания на счетах, так и в случае умножения выгодно использовать частные свойства чисел. Например, воспользоваться тем, что множимое немного больше или немного меньше какого-то круглого числа (способ округления).

$4985 \cdot 6 = 5000 \cdot 6 - 15 \cdot 6 = 30\,000 - 90 = 29\,910;$
$7013 \cdot 8 = 7000 \cdot 8 + 13 \cdot 8 = 56\,000 + 104 = 56\,104$ и т. п.

Выполните умножение на счетах удобным способом:

$3864 \cdot 2$;	$73 \cdot 4$;	$2627 \cdot 4$;	$3346 \cdot 8$;	$4320 \cdot 8$;
$763 \cdot 5$;	$1247 \cdot 5$;	$5724 \cdot 5$;	$7628 \cdot 5$;	$6317 \cdot 5$;
$438 \cdot 6$;	$728 \cdot 6$;	$1276 \cdot 6$;	$2834 \cdot 6$;	$5678 \cdot 6$;
$356 \cdot 7$;	$874 \cdot 7$;	$2623 \cdot 7$;	$3287 \cdot 7$;	$6536 \cdot 7$;
$469 \cdot 9$;	$638 \cdot 9$;	$724 \cdot 9$;	$2176 \cdot 9$;	$3238 \cdot 9$.

48. Деление на счетах несколько сложнее, чем предшествующие вычисления, но при некоторой изобретательности они тоже могут быть с успехом выполнены.

Если частное ожидается менее 10, то, как правило, применяется неоднократное вычитание данного числа из уменьшаемого, причем при каждом вычитании откладывается в самом верху на свободной проволоке одна «косточка».

Например, 4368 : 728: 1) 4368 – 728 = 3640; 2) 3640 – 728 = 2912; 3) 2912 – 728 = 2184; 4) 2184 – 728 = 1456; 5) 1456 – 728 = 728; 6) 728 – 728 = 0. Итак, выполнено 6 вычитаний, т. е. в 4368 число 728 содержится 6 раз, значит, 4368 : 728 = 6.

Здесь мы имеем случай деления без остатка, а мог быть и остаток, отличный от нуля, но способ деления от этого бы не изменился.

Взамен вычитания применялось и многократное сложение вычитаемых, пока не получится делимое, если деление без остатка. Если же имеем деление с остатком, то суммируют делители до тех пор, пока очередное прибавление вычитаемого может дать сумму больше делимого. Имеющие опыт деления чисел на счетах с помощью многократного вычитания данного числа умели его применять по образцу письменного деления, когда в частном получаются двух-, трех-, четырехзначные числа.

Особую роль играло деление пополам. Это деление начинают с низшего разряда делимого. Например, 73 956 : 2. 1) Делим устно 6 единиц пополам, получаем 3. Оставляем на счетах 3 единицы, а другую половину, т. е. 3 единицы, сбрасываем. На счетах значится 73 953. 2) Делим устно 5 десятков пополам, получаем 2 десятка и 1 десяток в остатке. 3 десятка сбрасываем, 2 десятка оставляем на счетах и половину остатка, т. е. 5 единиц, прибавляем к единицам. На счетах имеем 73 928. 3) Делим устно 9 сотен пополам. Получаем 4 сотни и 1 сотню в остатке. 5 сотен сбрасываем, 4 сотни оставляем на счетах, а половину остатка, т. е. 5 десятков, прибавляем к десяткам. На счетах имеем 73 478. 4) Делим устно 3 тысячи пополам, получаем 1 тысячу и 1 тысячу в остатке. 2 тысячи сбрасываем, 1 тысячу оставляем на счетах, а половину остатка, т. е. 5 сотен, прибавляем к сотням. На счетах имеем 71 978. 5) Делим устно 7 десятков тысяч пополам. Получаем 3 десятка тысяч и 1 десяток тысяч в остатке, 4 десятка тысяч сбрасываем, 3 десятка тысяч оставляем на счетах, а половину остатка, т. е. 5 тысяч, прибавляем к тысячам. Имеем 36 978.

Итак, 73 956 : 2 = 36 978.

Если же полученное частное разделить пополам, то исходное число будет разделенным на 4. Так с помощью нескольких делений пополам можно разделить заданное число на 4, 8, 16, ..., 2^n.

Умение делить пополам можно использовать во многих других вычислениях.

Например, при умножении на 5 можно заданное число умножить на 10 и полученный результат разделить пополам; при умножении на 15 умножить заданное число на 10 и прибавить половину полученного результата; при умножении на 35 заданное число умножить на 10, полученный результат сложить с самим собой, добавить еще первый результат и его половину и т. п.

Или вот еще. Чтобы число умножить на 4, можно сразу его умножить на 10 и полученный результат разделить пополам, а из этого результата вычесть исходное число.

Если же на последнем этапе не вычесть, а прибавить исходное число, то получим умножение на 6, а если еще прибавить одно исходное число, то получим его умножение на 7.

Умножение и деление на счетах применительно к десятичным дробям выполняется аналогично, но в некоторых случаях следует использовать особые свойства некоторых дробей. Например, 0,5 — это $\frac{1}{2}$, поэтому умножение на эту дробь равносильно делению на 2, а деление — удвоению делимого. Так же $0{,}25 = \frac{1}{4}$, а поэтому умножать на эту дробь – все равно что делить на 4, а делить на $0{,}25 = \frac{1}{4}$ — это то же, что и умножать на 4.

Вообще умножение и деление с дробями $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n}$ сводится к обратным действиям с обратными числами.

Особого внимания заслуживают умножение и деление с числами $\frac{2}{3}$, $0{,}75 = \frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $6\frac{1}{4}$ и т. п. При выполнении вычислений с этими числами можно сделать некоторые упрощения. Например, при умножении некоторого числа на $2\frac{1}{2}$ можно заданное число удвоить и еще найти половину его и полученные результаты сложить.

Выполните вычисления на счетах:

1) $264 \cdot 15$;	$186 \cdot 15$;	$528 \cdot 15$;	$442 \cdot 15$;	$324 \cdot 15$;
2) $326 \cdot 5$;	$248 \cdot 6$;	$524 \cdot 6$;	$176 \cdot 7$;	$746 \cdot 7$;
3) $486 : 0{,}5$;	$368 : 0{,}5$;	$724 : 0{,}5$;		
$486 \cdot 0{,}5$;	$368 \cdot 0{,}5$;	$724 \cdot 0{,}5$;		
4) $364 : 0{,}25$;	$148 : 0{,}25$;	$256 : 0{,}25$;		
$364 \cdot 0{,}25$;	$148 \cdot 0{,}25$;	$256 \cdot 0{,}25$;		
5) $477 : \frac{1}{3}$;	$261 : \frac{1}{3}$;	$195 : \frac{1}{5}$;	$252 : \frac{2}{3}$;	
$477 \cdot \frac{1}{3}$;	$261 \cdot \frac{1}{3}$;	$195 \cdot \frac{1}{5}$;	$252 \cdot \frac{2}{3}$;	
6) $168 : 0{,}75$;	$375 : 0{,}6$;			
$168 \cdot 0{,}75$;	$375 \cdot 0{,}6$;			
7) $378 : 1\frac{1}{2}$;	$570 : 2\frac{1}{2}$;	$630 : 3\frac{1}{3}$;		
$378 \cdot 1\frac{1}{2}$;	$570 \cdot 2\frac{1}{2}$;	$630 \cdot 3\frac{1}{3}$.		

В этом параграфе мы кратко ознакомились лишь с некоторыми простейшими вычислительными устройствами, применявшимися в прошлые времена, причем, как правило, отобрали те, которые легко можно изготовить самому. Нашей целью было возбудить интерес к вычислительным средствам прошлых лет, а более полное представление об этих средствах можно получить в упоминавшейся специальной литературе.

Решения

1. Все операции в этом и последующих заданиях выполняются на основе применения сочетательного и переместительного законов действий, т. е. слагаемые можно менять местами, объединять в некоторые группы или заменять отдельные слагаемые им соответствующими по значению суммами, и от этого окончательное значение суммы не изменяется.

53 624 + 4873 + 46 376 + 31 875 + 5127 = (53 624 + 46 376) + (4873 + + 5127) + 31 875 = 100 000 + 10 000 + 31 875 = 141 875;

458 036 + 234 562 + 71 523 + 541 964 + 765 438 + 928 477 = = (458 036 + 541 964) + (234 562 + 765 438) + (71 523 + 928 477) = = 1 000 000 + 1 000 000 + 1 000 000 = 3 000 000.

2. 74 587 + 6276 + 3745 + 25 436 = 74 587 + 25 413 + 23 + 6276 + + 3724 + 21, или = 74 564 + 25 436 + 23 + 6255 + 3745 + 21 = = 110 044;

62 763 + 37 259 + 8678 + 11 345 = 62 763 + 37 237 + 22 + 8678 + + 11 322 + 23 = 62 741 + 37 259 + 22 + 8655 + 11 345 + 23 = = 120 045;

17 872 + 52 188 + 4768 + 5246 = 17 872 + 52 128 + 60 + 4768 + + 5232 + 14 = 17 812 + 52 188 + 60 + 4754 + 5246 + 14 = 80 074.

3. **а)** 28 573 + 54 168 + 71 427 + 87 065 + 45 832 + 12 935 = (28 573 + + 71 427) + (54 168 + 45 832) + (87 065 + 12 935) = 100 000 + + 100 000 + 100 000 = 300 000;

б) 43 114 + 78 026 + 18 257 + 81 742 + 21 973 + 56 885 = (43 114 + + 56 885) + (78 026 + 21 973) + (18 257 + 81 742) = 99 999 + + 99 999 + 99 999 = 99 999 + 1 + 99 999 + 1 + 99 997 = 299 997.

4. Слагаемое необходимо предварительно представить удобными «частями», причем это можно сделать по-разному.

72 745 + 56 819 + 38 426 + 28 181 + 62 255 + 44 574 = 72 000 + 745 + + 56 000 + 819 + 38 000 + 426 + 28 000 + 181 + 62 000 + 255 + 44 000+

$+ 574 = (72\,000 + 28\,000) + (56\,000 + 44\,000) + (38\,000 + 62\,000) +$
$+ (745 + 255) + (819 + 181) + (426 + 574) = 303\,000;$

$47\,238 + 29\,607 + 75\,386 + 52\,393 + 70\,614 + 24\,762 = (47\,238 +$
$+ 52\,000 + 762) + (29\,607 + 70\,000 + 393) + (75\,386 + 24\,000 +$
$+ 614) = 100\,000 + 100\,000 + 100\,000 = 300\,000;$

$376\,584 + 623\,418 + 423\,756 + 576\,249 = (376\,584 + 623\,416) + 2 +$
$+ (423\,756 + 576\,244) + 5 = (376\,582 + 623\,418) + 2 + (423\,751 +$
$+ 576\,249) + 5 = 2\,000\,007;$

$638 + 137 + 225 + 788 + 86 + 126 = \underline{638 + 62} + \underline{75 + 225} + \underline{788 +}$
$\underline{+ 12} + \underline{74 + 126} = 700 + 300 + 800 + 200 = 2000$, или
$\underline{638 + 62} + \underline{137 + 163} + \underline{788 + 12} + \underline{86 + 114} = 2000$ и т. п.;
$86 + 98 + 77 + 97 + 87 + 55 = \underline{86 + 14} + \underline{98 + 2} + \underline{77 + 23} + \underline{97 + 3} +$
$+ \underline{87 + 13} = 86 + 14 + 98 + 2 + 77 + 23 + 87 + 13 + 55 + 45 = 500$
и т. п.;

$15\,062 + 24\,723 + 27\,938 + 32\,277 = \underline{15\,062 + 24\,000 + 938} +$
$+ \underline{27\,000 + 32\,277 + 723} = \underline{15\,000 + 24\,723 + 277} + \underline{27\,938 + 32\,000 +}$
$\underline{+ 62} = 100\,000$ и т. п.

5. Как в случае сложения, так и в случае вычитания существует много вариантов выполнения такого задания.

$35\,276 + 14\,823 - 45\,276 = 35\,276 - 35\,276 + 14\,823 - 10\,000 =$
$= 4823$, или
$35\,000 + 14\,000 - 45\,000 + 276 - 276 + 823 = 4823$, или
$35\,276 + 10\,000 - 45\,276 + 4823 = 4823$ и т. п.

6. $7538 + 8987 = 7525 + \underline{13 + 8987} = 7525 + 9000 = 16\,525;$
$7538 + \underline{8987 + 13} - 13 = 7538 + 9000 - 13 = 16\,525.$

7. Рассмотрим способ округления каждого слагаемого. Надо заметить, что здесь применимы и другие способы округления слагаемых.

$43\,997 + 25\,984 = \underline{43\,997 + 3} + \underline{25\,984 + 6} - 3 - 6 = 44\,000 +$
$+ 26\,000 - 9 = 69\,991.$

8. **а)** $6983 - 4798 = \underline{6983 + 17} - 4798 - 17 = 7000 - 4798 - 17 = 2202 -$
$- 17 = 2185;$

б) $6983 - 4798 = 6983 - (\underline{4798 + 2} - 2) = 6983 - 4800 + 2 = 2185;$

в) $6983 - 4798 = \underline{6983 + 17} - (\underline{4798 + 2}) - 17 + 2 = 7000 - 4800 -$
$- 15 = 2185;$

$25\,995 - 3998 = 25\,995 + 5 - 5 - (3998 + 2 - 2) = 26\,000 - 4000 -$
$- 3 = 21\,997;$
$426\,983 - 25\,997 = 427\,000 - 26\,000 - 17 + 3 = 400\,986.$

Здесь в каждом случае применен один из приемов округления, хотя можно использовать и другие приемы.

9. На основе способа округления компонентов можно построить правила прибавления и вычитания чисел вида $\underbrace{99...9}_{n-1 \text{ раз}}$, $\underbrace{99...9}_{n-1 \text{ раз}}8$, $\underbrace{99...9}_{n-1 \text{ раз}}7$ и т. п.

а) $367 + 99 = 367 + \underline{99 + 1} - 1 = 466;$
$538 + 99 = 538 + \underline{99 + 1} - 1 = 637;$
$439 + 99 = 439 + \underline{99 + 1} - 1 = 538;$
$82 + 99 = 82 + \underline{99 + 1} - 1 = 181.$

Как видим, получается в первом слагаемом увеличение числа сотен на 1, но уменьшение единиц на 1. Оно и понятно, так как в каждом случае прибавляем $99 + 1 = 100$ и вычитаем 1.

Итак, чтобы к какому-либо числу прибавить 99, достаточно в исходном числе сотни увеличить, а единицы уменьшить на 1.

б) Аналогичные рассуждения приводят к правилу в общем виде: чтобы к какому-либо числу прибавить $\underbrace{99...9}_{n \text{ раз}}$, можно в исходном числе цифру $n + 1$-го разряда увеличить, а цифру единиц уменьшить на 1.

Обоснование: $a + \underbrace{99...9}_{n \text{ раз}} = a + 10^n - 1.$

$3\underline{24\,54}6 + 99\,999 = 4\underline{24\,54}5;$
$\underline{27\,32}9 + 99\,999 = 1\underline{27\,32}8.$

в) Правила аналогичные, но число единиц приходится уменьшать на 2, 3, 4, ...

10. По аналогии строятся правила вычитания чисел вида: $\underbrace{99...9}_{n \text{ раз}}$, $\underbrace{99...9}_{n-1 \text{ раз}}8$, $\underbrace{99...9}_{n-1 \text{ раз}}7$ и т. д. Чтобы из какого-либо числа вычесть $\underbrace{99...9}_{n-1 \text{ раз}}\alpha$ (α — цифра, т. е. $0 \leqslant \alpha \leqslant 9$), можно в уменьшаемом цифру $n + 1$-го разряда уменьшить на 1, а цифру единиц увеличить на $(10 - \alpha)$.

Обоснование: $a - \underbrace{99...9}_{n-1 \text{ раз}}\alpha = a - (10^n - (10 - \alpha)) = a - 10^n + (10 - \alpha)$.

415 736 – 9998 = 405 738;
56 845 – 9997 = 46 848;
213 564 – 9996 = 203 560;
124 453 – 9999 = 114 452.

11. $6875 \cdot 8 = (7000 - 125) \cdot 8 = 7000 \cdot 8 - 125 \cdot 8 = 56\,000 - 1000 = 55\,000$;
$288 \cdot 12 = (300 - 12) \cdot 12 = 300 \cdot 12 - 12 \cdot 12 = 3600 - 144 = 3456$;
$637 \cdot 19 = 637 \cdot (20 - 1) = 637 \cdot 20 - 637 \cdot 1 = 12\,740 - 637 = 12\,103$;
$324 \cdot 17 = 324 \cdot (20 - 3) = 324 \cdot 20 - 324 \cdot 3 = 6480 - 972 = 5508$.

12. $7182 : 18 = (7200 - 18) : 18 = 7200 : 18 - 18 : 18 = 400 - 1 = 399$;
$8449 : 17 = (8500 - 51) : 17 = 8500 : 17 - 51 : 17 = 500 - 3 = 497$;
$8046 : 27 = (8100 - 54) : 27 = 8100 : 27 - 54 : 27 = 300 - 2 = 298$.

13. $45\,127 \cdot 2 = (45\,000 + 127) \cdot 2 = 45\,000 \cdot 2 + 127 \cdot 2 = 90\,254$;
$23\,258 \cdot 4 = (23\,000 + 250 + 8) \cdot 4 = 23\,000 \cdot 4 + 250 \cdot 4 + 8 \cdot 4 = 93\,032$;
$37\,746 \cdot 3 = (37\,000 + 740 + 6) \cdot 3 - 37\,000 \cdot 3 + 740 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 111\,000 + 2220 + 18 = 113\,238$;
$16\,127 \cdot 5 = (16\,000 + 120 + 7) \cdot 5 = 16\,000 \cdot 5 + 120 \cdot 5 + 7 \cdot 5 = 80\,000 + 600 + 35 = 80\,635$;
$12\,515 \cdot 8 = (12\,500 + 15) \cdot 8 = 12\,500 \cdot 8 + 15 \cdot 8 = 100\,000 + 120 = 100\,120$;
$1812 \cdot 37 = (1800 + 12) \cdot 37 = 1800 \cdot 37 + 12 \cdot 37 = 600 \cdot \underline{3 \cdot 37} + 4 \cdot \underline{3 \cdot 37} = 66\,600 + 444 = 67\,044$;
$5636 \cdot 25 = (5600 + 36) \cdot 25 = 5600 \cdot 25 + 36 \cdot 25 = 1400 \cdot 4 \cdot 25 + 9 \cdot 4 \cdot 25 = 140\,000 + 900 = 140\,900$;
$7224 \cdot 125 = (7200 + 24) \cdot 125 = 900 \cdot \underline{8 \cdot 125} + 3 \cdot \underline{8 \cdot 125} = 900\,000 + 3000 = 903\,000$;
$3248 \cdot 250 = (3200 + 48) \cdot 250 = 800 \cdot \underline{4 \cdot 250} + 12 \cdot \underline{4 \cdot 250} = 800\,000 + 12\,000 = 812\,000$.

Как видим, во всех этих случаях необходимо выделить «части» множимого с учетом множителя.

14. а) $4235 : 7 = (4200 + 35) : 7 = 4200 : 7 + 35 : 7 = 605$;

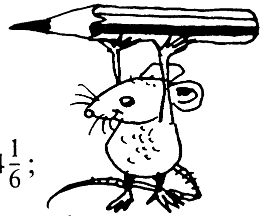
$523\,978 : 13 = (520\,000 + 3900 + 78) : 13 = 40\,000 + 300 + 6 = 40\,306$.

$724\,543 : 181 = (724\,000 + 543) : 181 = 724\,000 : 181 + 543 : 181 = 4000 + 3 = 4003$.

б) $741 : 3 = (600 + 120 + 21) : 3 = 200 + 40 + 7 = 247;$
$834 : 6 = (600 + 180 + 54) : 6 = 100 + 30 + 9 = 139;$
$994 : 7 = (700 + 280 + 14) : 7 = 100 + 40 + 2 = 142;$
$29\,348 : 4 = (28\,000 + 1200 + 120 + 28) : 4 = 7337;$
$43\,875 : 5 = (40\,000 + 3500 + 350 + 25) : 5 = 8775;$
$38\,472 : 12 = (36\,000 + 2400 + 72) : 12 = 3206;$
$67\,912 : 13 = (65\,000 + 2600 + 260 + 52) : 13 = 5224;$
$37\,656 : 9 = (36\,000 + 900 + 720 + 36) : 9 = 4184;$
$73\,128 : 24 = (72\,000 + 960 + 168) : 24 = 3047.$

15. $7\frac{2}{13} \cdot 26 = \left(7 + \frac{2}{13}\right) \cdot 26 = 7 \cdot 26 + \frac{2}{13} \cdot 26 = 186;$

$36\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} = 36 \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} = 16\frac{4}{21};$



$48\frac{12}{17} : 6 = 48 : 6 + \frac{12}{17} : 6 = 8\frac{2}{17};$

$12\frac{5}{9} : \frac{2}{15} = 12 : \frac{2}{15} + \frac{5}{9} : \frac{2}{15} = 90 + \frac{25}{6} = 94\frac{1}{6};$

$38\frac{4}{7} : 18 = \left(36 + 2\frac{4}{7}\right) : 18 = 36 : 18 + \frac{18}{7} : 18 = 2\frac{1}{7}.$

16. $14\frac{15}{16} \cdot 24 = \left(15 - \frac{1}{16}\right) \cdot 24 = 15 \cdot 24 - \frac{1}{16} \cdot 24 = 360 - 1\frac{1}{2} = 358\frac{1}{2};$

$124\frac{7}{8} \cdot 8 = \left(125 - \frac{1}{8}\right) \cdot 8 = 125 \cdot 8 - \frac{1}{8} \cdot 8 = 1000 - 1 = 999;$

$47\frac{13}{19} : 6 = \left(48 - \frac{6}{19}\right) : 6 = 48 : 6 - \frac{6}{19} : 6 = 8 - \frac{1}{19} = 7\frac{18}{19};$

$55\frac{7}{8} : \frac{4}{7} = \left(56 - \frac{1}{8}\right) : \frac{4}{7} = 56 : \frac{4}{7} - \frac{1}{8} : \frac{4}{7} = 98 - \frac{7}{32} = 97\frac{25}{32}.$

18. а) Обоснование. Пусть надо возвести в квадрат число a. Руководствуясь правилом, имеем $(a + b)(a - b) + b^2 = a^2 - b^2 + b^2 = a^2$. Таким образом, это правило годится во всех случаях возведения чисел в квадрат, но выгодно его применять, когда возводимое в квадрат число близко к «круглому» числу. Например, $798^2 = (798 + 2) \times (798 - 2) + 2^2 = 800 \cdot 796 + 4 = 636\,804$.

б) Когда двузначное число оканчивается пятеркой, то при вычитании 5 получаем десятки возводимого в квадрат числа, а при прибавлении 5 получаем очередное число десятков, т. е. цифры таких десятков — это две последовательные цифры. При перемножении десятков получаем сотни, где потом вместо последних двух нулей будет записано 25, т. е. 5^2.

Другое объяснение. $(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25$, но a и $a + 1$ в данном случае соседние натуральные числа.

$100a(a + 1)$ — сотни, при прибавлении 25 это число займет место последних двух нулей, т. е. как бы будет приписано к произведению $a(a + 1)$.

в) Обоснование. $(40 + b)^2 = 1600 + 80b + b^2 = 1500 + 100b + 100 - 20b + b^2 = (15 + b) \cdot 100 + (10 - b)^2$.

г) Обоснование. $(50 + b)^2 = 2500 + 100b + b^2 = (25 + b) \cdot 100 + b^2$.

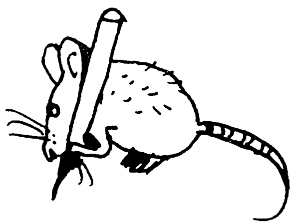
19. Обоснования те же, что и в № 18.

21. а) В каждом из этих случаев множителями берутся только степени двух и пяти, причем с одинаковыми показателями, а в произведении получается 10 с этим же показателем. Это потому, что $2 \cdot 5 = 10$, $2^n \cdot 5^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\text{ раз}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{n\text{ раз}} = \underbrace{(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 5)}_{n\text{ раз}} = 10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ раз}}$.

б) В делимом некоторая степень 10, а делитель такая же степень 2(5).

Тогда $10^n : 2^n = (\underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n\text{ раз}}) : \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\text{ раз}} = \underbrace{(10 : 2) \cdot (10 : 2) \cdot \ldots \cdot (10 : 2)}_{n\text{ раз}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{n\text{ раз}} = 5^n$. То же при делении на 5^n.

22. а) $175 \cdot 4 = 7 \cdot \underline{25 \cdot 4} = 700$;
$1875 \cdot 16 = 3 \cdot \underline{625 \cdot 16} = 30\,000$;
$375 \cdot 8 = 3 \cdot \underline{125 \cdot 8} = 3000$;



б) $25 \cdot 12 = \underline{25 \cdot 4} \cdot 3 = 300$;
$125 \cdot 24 = \underline{125 \cdot 8} \cdot 3 = 3000$;
$625 \cdot 32 = \underline{625 \cdot 16} \cdot 2 = 20\,000$;

в) $75 \cdot 16 = 3 \cdot \underline{25 \cdot 4} \cdot 4 = 1200$;
$375 \cdot 24 = 3 \cdot \underline{125 \cdot 8} \cdot 3 = 9000$;
$875 \cdot 16 = 7 \cdot \underline{125 \cdot 8} \cdot 2 = 14\,000$;
$4375 \cdot 32 = 175 \cdot \underline{125 \cdot 8} \cdot 4 = 1000 \cdot \underline{25 \cdot 4} \cdot 7 = 700\,000$.

Во всех этих случаях мы выделяем множители вида 2^n и 5^n, они дают произведение 10^n.

г) $8 \cdot 586 \cdot 125 = 586 \cdot \underline{8 \cdot 125} = 586\,000$;
$28 \cdot 4 = (25 + 3) \cdot 4 = \underline{25 \cdot 4} + 3 \cdot 4 = 112$;
$127 \cdot 8 = (125 + 2) \cdot 8 = \underline{125 \cdot 8} + 2 \cdot 8 = 1016$;
$124 \cdot 8 = (125 - 1) \cdot 8 = \underline{125 \cdot 8} - 8 = 992$;
$125 \cdot 9 = 125 \cdot (8 + 1) - \underline{125 \cdot 8} + 125 = 1125$;

$75 \cdot 36 = 3 \cdot \underline{25 \cdot 4} \cdot 9 = 27\,000;$
$875 \cdot 72 = 7 \cdot \underline{125 \cdot 8} \cdot 9 = 63\,000;$
$25\,637 \cdot 4 = (25\,000 + 625 + 12) \cdot 4 = 25\,000 \cdot 4 + \underline{625 \cdot 4} + 12 \cdot 4 =$
$= 100\,000 + 2500 + 48 = 102\,458.$

23. а) Объяснить этот прием можно по-разному. 1) Так как на 25 умножаются числа, кратные 4, то они могут быть представлены в виде $4k$. Но тогда имеем: $4k \cdot 25 = 100k$. Значит, предварительно надо найти k, т. е. умножаемое число разделить на 4, а потом к этому k приписать два нуля. 2) По-другому: $a \cdot 25 = a : 4 \cdot 100 = \frac{a}{4} \cdot 100$.

б) Число, кратное 25, имеет вид: $100a + 25k$. Тогда частное $(100a + 25k) : 25 = 100a : 25 + 25k : 25 = 4a + k$, где a — число сотен делимого и $k \leqslant 3$ (k — это $00 : 25 = 0$; $25 : 25 = 1$; $50 : 25 = 2$; $75 : 25 = 3$).

24. а) Всякое натуральное число можно представить в виде: $4a + k$, где a — любое натуральное число, $k \leqslant 3$, т. е. $k = 1, 2, 3$. Тогда $(4a + k) \cdot 25 = 100a + 25k$.

б) $a : 25 = a : (100 : 4) = a : \frac{100}{4} = \frac{4a}{100}$, но разделить на 100 равносильно перенесению запятой влево на два знака.

в) Разновидность п. б).

25. а) Число, кратное 8, может быть представлено как $8b$, поэтому $8b \cdot 125 = 1000b$. Правило могло быть таким: чтобы число, кратное 8, умножить на 125, достаточно его разделить на 8 и к полученному частному приписать три нуля. $a \cdot 125 = a \cdot (1000 : 8) = a \cdot \frac{1000}{8} = \frac{a}{8} \cdot 1000$.

б) Правило может быть таким: чтобы число, кратное 125, разделить на 125, достаточно его число тысяч умножить на 8 и к полученному произведению прибавить (не приписать) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если окончания делимого были соответственно 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875*.

Здесь рассматриваются делимые вида $1000b + 125k$, поэтому $(1000b + 125k) : 125 = 8b + k$, где b — число тысяч делимого, k — частное от деления на 125 трехзначного окончания делимого, причем $k \leqslant 7$.

в) Разновидность п. б).

---

* Это правило можно выразить и так: чтобы числа, имеющие окончания 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750 или 875, разделить на 125, достаточно отбросить это окончание, а остальную часть делимого умножить на 8 и к полученному результату прибавить (не приписать!) в соответствии с окончанием делимого 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

26. а) Всякое число можно представить в виде $8b + k$, тогда $(8b + k) \cdot 125 = 8b \cdot 125 + k \cdot 125 = 1000b + 125k$, где $k \leqslant 7$, т. е. $k = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) $a : 125 = a : \frac{1000}{8} = \frac{8a}{1000}$, но разделить $8a$ на тысячу значит — отделить запятой три знака, считая справа налево.

в) Частный случай п. б).

27. а) $a \cdot 5^n = a \cdot \frac{10^n}{2^n} = \frac{a \cdot 2^n}{10^n}$; **б)** $a : 5^n = \frac{a \cdot 2^n}{5^n \cdot 2^n} = \frac{a \cdot 2^n}{10^n}$.

28. а) Если a кратно 4, то $a = 4b$, тогда $a \cdot 2\frac{1}{2} = 4b \cdot 2\frac{1}{2} = b \cdot \left(4 \cdot 2\frac{1}{2}\right) =$ $= b \cdot 10$, но $b = a : 4$.

б) Если $a = 4b + r$, то $a \cdot 2\frac{1}{2} = (4b + r) \cdot 2\frac{1}{2} = 4b \cdot 2\frac{1}{2} + r \cdot 2\frac{1}{2} =$ $= 10b + 2\frac{1}{2}r$, где $b = a : 4$ (ост. r).

г) $a \cdot 0{,}25 = a \cdot \frac{1}{4} = \frac{a}{4}$; $a \cdot 0{,}125 = a \cdot \frac{1}{8} = \frac{a}{8}$.

д) $a : 0{,}25 = a : \frac{1}{4} = a \cdot 4$; $a : 0{,}125 = a : \frac{1}{8} = a \cdot 8$.

Вообще, это относится ко всем единичным дробям $\frac{1}{b}$. Например, $a : \frac{1}{7} = a \cdot 7$.

29. а) $a : 3\frac{1}{3} = a : \frac{10}{3} = \frac{3a}{10}$;

$a : 33\frac{1}{3} = a : \frac{100}{3} = \frac{3a}{100}$;

$a : 333\frac{1}{3} = a : \frac{1000}{3} = \frac{3a}{1000}$;

....

$a : \underbrace{33...3}_{n \text{ раз}}\frac{1}{3} = a : \frac{10^n}{3} = \frac{3a}{10^n}$.

б) $a : 1\frac{3}{7} = a : \frac{10}{7} = \frac{7a}{10^n}$;

$a : 14\frac{2}{7} = a : \frac{100}{7} = \frac{7a}{100}$;

$a : 142\frac{6}{7} = a : \frac{1000}{7} = \frac{7a}{1000}$.

30. а) Любое двузначное число можно представить в виде $10a + b$, где a — цифра десятков, а b — цифра единиц. Умножим число $(10a + b)$ на 9 по приведенному правилу.

1) Из числа $(10a + b)$ вычтем цифру его десятков a и еще 1, т. е. получаем $(10a + b) - (a + 1)$ — это десятки искомого произведения.

2) Нужно из 9 или 18 вычесть сумму цифр полученного на первом шаге числа десятков искомого произведения. Чтобы найти сумму цифр полученного на первом шаге числа десятков $(10a + b) - (a + 1)$, надо рассмотреть два случая: 1) $a + 1 \leqslant b$ (сумму цифр вычесть из 9); 2) $a + 1 > b$ (сумму цифр вычесть из 18).

В первом случае $b - (a + 1) \geqslant 0$, тогда сумма цифр числа десятков искомого произведения будет равна $a + (b - (a + 1)) = b - 1$. Вычитая из 9 полученную сумму, получаем $9 - (b - 1) = 9 - b + 1 = 10 - b$ — это количество единиц в искомом произведении.

Во втором случае $b - (a + 1) < 0$, тогда, чтобы найти цифру единиц числа десятков искомого произведения $((10a + b) - (a + 1))$, надо в разряде десятков занять единицу, т. е. получаем:

$$10\underbrace{a}_{\substack{\text{число}\\\text{десятков}}} + \underbrace{b - (a+1)}_{\substack{\text{число}\\\text{единиц}}} = 10\underbrace{(a-1)}_{\substack{\text{число}\\\text{десятков}}} + \underbrace{(10 + b - (a+1))}_{\substack{\text{число}\\\text{единиц}}}$$

Найдем сумму цифр числа десятков искомого произведения $10a + b - (a + 1) : (a - 1) + (10 + b - (a + 1)) = a - 1 + 10 + b - a - 1 = 8 + b$. Вычитая из 18 полученную сумму, получаем: $18 - (8 + b) = 10 - b$ — количество единиц в искомом произведении.

3) Составим искомое произведение:

$10(10a + b - (a + 1)) + (10 - b) = 10(9a + b - 1) + 10 - b = 90a + 10b - 10 + 10 - b = 90a + 9b = 9(10a + b)$ — это действительно произведение числа $(10a + b)$ и 9, что и требовалось доказать.

б) $(100a + 10b + c) : 9 = (90a + 9b + 9a + (a + b + c)) : 9 = 10a + b + a + (a + b + c) : 9 = (10a + b) + a + 1$(или 2), где $a + b + c = 9$ или 18.

А можно обосновать это правило, умножив полученные частные на 9, т. е. сделать проверку: $(10a + b + a + 1) \cdot 9 = 90a + 9b + 9a + 9$, но 9 — это сумма цифр делимого. Тогда $90a + 9b + 9a + a + b + c = 100a + 10b + c$ — получили делимое, деление выполнено верно.

31. а) Возьмем четырехзначное число и выполним указанные в правиле операции.

$1000a + 100b + 10c + d$; 1) $1000a + 100b + 10c + d - 10a - b - 1 = 990a + 99b + 10c + d - 1$; 2) $(990a + 99b + 10c + d - 1) \cdot 100 + (100 - (10c + d)) = 99\,000a + 9900b + 990c + 99d$; 3) $99(1000a + 100b + 10c + d)$, т. е. исходное число оказалось умноженным на 99.

А можно и так рассуждать. Пусть исходное число будет представлено как $100a + b$, где b — двузначное окончание этого числа, a — число его сотен. Тогда по изложенному правилу имеем $(100a + b) \cdot 99 = (100a + b - a - 1) \cdot 100 + (100 - b) = 99a \cdot 100 + 100b - 100 + 100 - b = 99a \cdot 100 + 99b = 99(100a + b)$, т. е. действительно исходное число оказалось умноженным на 99.

32. а) Возьмем некоторое число a и умножим его на 9.
$a \cdot 9 = a \cdot (10 - 1) = 10a - a = 10a - 10 + 10 - a = 10(a - 1) + (10 - a)$ — получили формулу, выражающую предложенное правило.

б) Аналогичны обоснования и последующих правил.

г) $a \cdot \underbrace{99...9}_{n \text{ раз}} = a \cdot (10^n - 1) = a \cdot 10^n - a = a \cdot 10^n - 10^n + 10^n - a = 10^n (a - 1) + (10^n - a)$.

Когда во множимом цифр больше, чем во множителе $\underbrace{99...9}_{n \text{ раз}}$, то умножение можно выполнять по частям.

Например, $274 \cdot 99 = 270 \cdot 99 + 04 \cdot 99 = 26\,730 + 396 = 27\,126$, или $274 \cdot 99 = 200 \cdot 99 + 74 \cdot 99 = 19\,800 + 7326 = 27\,126$.

33. а) Пусть имеем четырехзначное число (трехзначное можно изобразить в виде четырехзначного, приписав слева 0) $100a + b$, где a – левая часть исходного числа, записанная двумя первыми цифрами, $\overline{ab}$ — это двузначное его окончание. Но тогда $100a + b = 99a + (a + b)$. $99a$ всегда делится на 99. Значит, делимость исходного числа на 99 зависит от делимости на 99 суммы $(a + b)$, т. е. суммы частей рассматриваемого четырехзначного числа.

Можно и так рассуждать. Пусть имеем четырехзначное число $1000a + 100b + 10c + d$, где a, b, c, d — цифры. Тогда исходное число можно представить так: $990a + 99b + (10a + b) + (10c + d) = 99 \times (10a + b) + ((10a + b) + (10c + d))$. $99(10a + b)$ всегда делится на 99. Значит, делимость на 99 всего выражения, т. е. исходного четырехзначного числа, зависит от суммы $(10a + b) + (10c + d)$, а это сумма двузначных чисел, выраженных двумя первыми цифрами и двумя последними цифрами исходного четырехзначного числа.

б) Доказывается аналогично.

в) Пусть a и b — двузначные части четырехзначного числа $100a + b$, причем это число делится на 99. Тогда $(100a + b) : 99 = (99a + a + b) : 9 = 99a : 99 + (a + b) : 99 = a + 1$, так как $a + b = 99$.

г) Возьмем шестизначное число $10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f$ и найдем по правилу частное при делении его на 99: 1) $10^3a + 10^2b + 10c + d$; 2) $10^3a + 10^2b + 10c + d + 10a + b + 1$ (если сумма цифр исходного делимого больше 27, то плюс 2). Проверим достоверность полученного частного с помощью умножения его на делитель, т. е. на $99 = 100 - 1$. Должно получиться делимое, если частное истинное.

$(10^3a + 10^2b + 10c + d + 10a + b + 1)(100 - 1) = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10^3a + 10^2b + 100 - 10^3a - 10^2b - 10c - d - 10a - b - 1 = (10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f) + (99 - 10a - b - 10c - d - 10e - f) = (10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f) + (99 - ((10a + b) + (10c + d) + (10e + f))) = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f$, так как делимое делится на 99, а поэтому $(10a + b) + (10c + d) + (10e + f) = 99$ (при сумме цифр делимого больше 27 в частном было бы плюс 2, и в последней скобке оказалось бы 198, но тогда и $(10a + b) + (10c + d) + (10e + f) = 198$.

д) Доказательство выполняется аналогично п. а).

е) Обоснование аналогично п. г).

34. а) $(10a + b) \cdot 11 = (10a + b)(10 + 1) = 100a + 10a + 10b + b = 100a + 10(a + b) + b$, т. е. цифра десятков множимого становится цифрой сотен произведения (она может увеличиться на 1, когда $a + b \geqslant 10$), а цифра десятков произведения равна сумме цифр множимого, завершается произведение цифрой единиц множимого.

б) Возьмем, например, пятизначное число и умножим его на $11 = 10 + 1$.

$(10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e)(10 + 1) = 10^5a + 10^4a + 10^4b + 10^3b + 10^3c + 10^2c + 10^2d + 10d + 10e + e$. Как видим, правило подтверждается.

в) Если $a + c = b$, то $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 100a + 10a + 10c + c = 110a + 11c = 11(10a + c)$.

Если $a + c = 11 + b$, то $\overline{abc} = 100a + 10(a + c - 11) + c = 100a + 10a + 10c - 110 + c = 110a - 110 + 11c = 11(10(a - 1) + c)$.

Признак делимости на 11 доказан.

Если $a + c = b$, то $\overline{abc} : 11 = (100a + 10b + c) : 11 = (100a + 10a + 10c + c) : 11 = (110a + 11c) : 11 = 11(10a + c) : 11 = 10a + c = \overline{ac}$.

Если $a + c = 11 + b$, то $\overline{abc} : 11 = 11(10(a - 1) + c) : 11 = 10(a - 1) + c = \overline{(a - 1)c}$.

Правило обосновано.

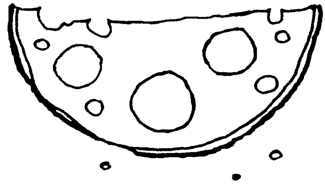
37. а) Пусть имеем двузначные числа a и b, а их дополнения до 100 соответственно α и β, т. е. $a = 100 - \alpha$, $b = 100 - \beta$. Тогда при умножении «крестом» имеем:

$$\begin{array}{l} a \quad \alpha \\ b \quad \beta \end{array} \times$$

$$\overline{(a - \beta) \cdot 10^2 + \alpha\beta,}$$

или $\overline{(b - \alpha) \cdot 10^2 + \alpha\beta,}$

или $(10^2 - (\alpha + \beta)) \cdot 10^2 + \alpha\beta.$



Выполним это же умножение обычным способом: $a \cdot b = (100 - \alpha)(100 - \beta) = 100 \cdot 100 - 100\alpha - 100\beta + \alpha\beta = (100 - \alpha - \beta) \cdot 100 + \alpha\beta = (a - \beta) \cdot 100 + \alpha\beta = (b - \alpha) \cdot 100 + \alpha\beta = (100 - (\alpha + \beta)) \cdot 100 + \alpha\beta$ — мы получили те же результаты, что и в случае применения умножения «крестом».

б) Аналогично.

в) Рассмотрим умножение «крестом» в общем виде. Пусть имеем n-значные числа a и b, которые на немного меньше 10^n. Их дополнения до 10^n соответственно α и β, т. е. $a = 10^n - \alpha$, $b = 10^n - \beta$.

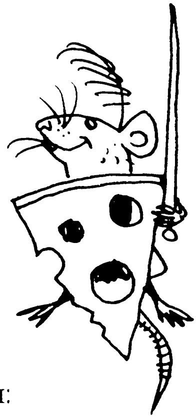
Тогда:

$$\begin{array}{l} a \quad \alpha \\ b \quad \beta \end{array} \downarrow \times$$

$$\overline{(a - \beta) \cdot 10^n + \alpha\beta,}$$

или $\overline{(b - \alpha) \cdot 10^n + \alpha\beta,}$

или $(10^n - (\alpha + \beta)) \cdot 10^n + \alpha\beta.$



Перемножим эти числа привычным способом:
$a \cdot b = (10^n - \alpha)(10^n - \beta) = 10^n \cdot 10^n - 10^n\alpha - 10^n\beta + \alpha\beta = (10^n - \alpha - \beta) \cdot 10^n + \alpha\beta = (a - \beta) \cdot 10^n + \alpha\beta = (b - \alpha) \cdot 10^n + \alpha\beta = (10^n - (\alpha + \beta)) \cdot 10^n + \alpha\beta$, т. е. получаются те же результаты, что и при умножении «крестом».

д) Пусть n-значные числа a и b такие, что они немного больше 10^n, а их «избыток» над 10^n соответственно α и β, т. е. $a = 10^n + \alpha$, $b = 10^n + \beta$.

Тогда:

$$\begin{array}{ccc} a & \overset{+}{\times} & \alpha \\ b & \underset{+}{} & \beta \end{array}\ \Big\downarrow\times$$

$$(a+\beta)\cdot 10^n+\alpha\beta,$$

или $(b+\alpha)\cdot 10^n+\alpha\beta,$

или $(10^n+(\alpha+\beta))\cdot 10^n+\alpha\beta;$

или

$$\begin{array}{ccc} a & \overset{-}{\times} & -\alpha \\ b & \underset{-}{} & -\beta \end{array}\ \Big\downarrow\times$$

$$(a-(-\beta))\cdot 10^n+\alpha\beta=(a+\beta)\cdot 10^n+\alpha\beta,$$

или $(b-(-\alpha))\cdot 10^n+\alpha\beta=(b+\alpha)\cdot 10^n+\alpha\beta,$

или $(10^n-(-\alpha-\beta))\cdot 10^n+\alpha\beta=(10^n+(\alpha+\beta))\cdot 10^n+\alpha\beta.$

Выполним умножение привычным способом.

$a\cdot b=(10^n+\alpha)(10^n+\beta)=10^n\cdot 10^n+10^n\alpha+10^n\beta+\alpha\beta=(10^n+\alpha+\beta)\cdot 10^n+\alpha\beta=(a+\beta)\cdot 10^n+\alpha\beta=(b+\alpha)\cdot 10^n+\alpha\beta=(10^n+(\alpha+\beta))\cdot 10^n+\alpha\beta.$

Результаты совпадают.

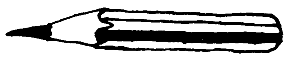
е) Рассмотрим случай, когда $a>10^n$, $b<10^n$, их «дополнения» («избыток» и «недостаток») до 10^n (соответственно α и β, т. е. $a=10^n+\alpha$, $b=10^n-\beta$. Выполним умножение a на b «крестом».

$$\begin{array}{ccc} a & \times & \alpha \\ b & & \beta \end{array}$$

$$(a-\beta)\cdot 10^n-\alpha\beta,$$

или $(b-\alpha)\cdot 10^n-\alpha\beta,$

или $(10^n+(\alpha-\beta))\cdot 10^n-\alpha\beta;$



или

$$\begin{array}{ccc} a & \times & -\alpha \\ b & & -\beta \end{array}$$

$$(a-\beta)\cdot 10^n+(-\alpha)\beta=(a-\beta)\cdot 10^n-\alpha\beta,$$

или $(b-(-\alpha))\cdot 10^n+(-\alpha)\beta=(b+\alpha)\cdot 10^n-\alpha\beta,$

или $(10^n-(-\alpha)-\beta)\cdot 10^n+(-\alpha)\beta=(10^n+(\alpha-\beta))\cdot 10^n-\alpha\beta.$

Умножим a на b привычным способом:

$a \cdot b = (10^n + \alpha)(10^n - \beta) = 10^n \cdot 10^n + 10^n\alpha - 10^n\beta - \alpha\beta = (10^n + \alpha - \beta) \cdot 10^n - \alpha\beta = (a - \beta) \cdot 10^n - \alpha\beta = (b + \alpha) \cdot 10^n - \alpha\beta = (10^n + (\alpha - \beta)) \cdot 10^n - \alpha\beta$.

Результаты совпадают.

ж, з, и) Обоснования аналогичные.

39.

$1 = 1^3$	$8 = 2^3$	$27 = 3^3$	$64 = 4^3$	$125 = 5^3$	$216 = 6^3$	$343 = 7^3$	$512 = 8^3$	$729 = 9^3$	Сумма
1	2	3	4	5	6	7	8	9	45
2	4	6	8	10	12	14	16	18	$45 \cdot 2$
3	6	9	12	15	18	21	24	27	$45 \cdot 3$
4	8	12	16	20	24	28	32	36	$45 \cdot 4$
5	10	15	20	25	30	35	40	45	$45 \cdot 5$
6	12	18	24	30	36	42	48	54	$45 \cdot 6$
7	14	21	28	35	42	49	56	63	$45 \cdot 7$
8	16	24	32	40	48	56	64	72	$45 \cdot 8$
9	18	27	36	45	54	63	72	81	$45 \cdot 9$
45	$45 \cdot 2$	$45 \cdot 3$	$45 \cdot 4$	$45 \cdot 5$	$45 \cdot 6$	$45 \cdot 7$	$45 \cdot 8$	$45 \cdot 9$	

а) Сумма чисел первой строки (столбца) 45, но в n-й строке (столбце) каждое соответствующее число получено умножением чисел первой строки (столбца) на n, а поэтому и ее сумма больше в n раз.

б) Возьмем любой гномон и сложим его числа. Но эти числа получены умножением на n чисел 1, 2, 3, ..., n, ..., 3, 2, 1. Тогда имеем сумму n-го гномона $n(1 + 2 + 3 + ... + n + (n - 1) + ... + 3 + 2 + 1) = n((1 + 2 + 3 + ... + n) + (1 + 2 + 3 + ... + n - 1)) = n\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\right) = \frac{n+1+n-1}{2} n^2 = n^3$, т. е. сумма чисел любого гномона равна кубу его номера.

в) Как видим, каждый новый такой квадрат получается присоединением очередного гномона. Тогда сумма чисел n-го такого квадрата равна: $1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{2}$*. Это можно проверить с помощью непосредственных вычислений. Таким образом, лишь бы знать номер квадрата, а сумму его чисел можно найти по этой установленной формуле.

Например, в седьмом квадрате $S_7 = \left(\frac{7(7+1)}{2}\right)^2 = 28^2 = 784$.

41. а) Пусть $1 \leqslant a \leqslant 9$, $a \in N$, тогда $a \cdot 9 = a(10 - 1) = 10a - a + 10 - 10 = 10(a - 1) + (10 - a)$, где $10(a - 1)$ — число пальцев до загнутого, $(10 - a)$ — число пальцев после загнутого.

г) Пусть имеется два однозначных натуральных числа $a > 5$ и $b > 5$, тогда их произведение можно представить так:
$ab = 10a - 50 + 10b - 50 + 100 - 10a - 10b + ab = 10(a - 5) + 10(b - 5) + 10(10 - a) - b(10 - a) = 10((a - 5) + (b - 5)) + (10 - a)(10 - b)$, где $10((a - 5) + (b - 5))$ — число выставленных пальцев, $(10 - a)(10 - b)$ — число загнутых пальцев.

А можно просто выполнить все операции, указанные в приеме этого умножения.

Тогда имеем: $((a - 5) + (b - 5)) \cdot 10 + (5 - (a - 5))(5 - (b - 5)) = 10a + 10b - 100 + 100 - 10a - 10b + ab = ab$, т. е. состоялось умножение чисел a и b.

Между прочим, выполнение этого приема для примера $7 \cdot 6$ можно было записать и так:

7 более пяти на 2;	7 менее десяти на 3;
6 более пяти на 1;	6 менее десяти на 4;
3 дес.	12 ед.

$7 \cdot 6 = 3$ дес. $+ 12$ ед. $= 42$.

* В общем виде может быть доказано методом математической индукции.

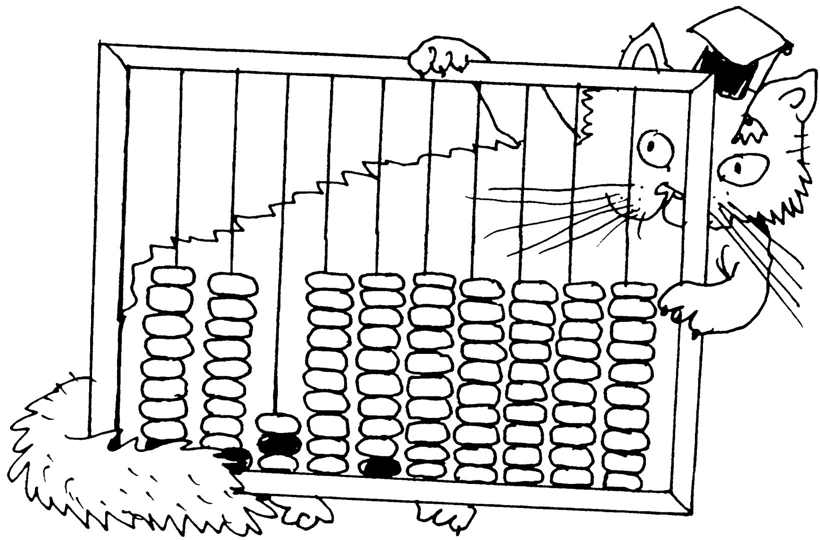
Послесловие (обращение к читателю-ученику)

Не все задания заинтересовали? Ну и что! Как говорится, на вкус и цвет товарищей нет. Что одному интересно, другому — скука.

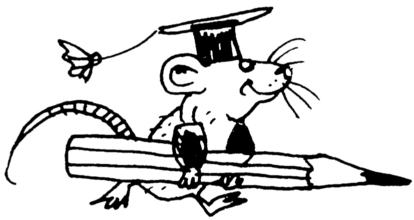
Не все задания осилили? Ну и что! Начало положено, будет и продолжение. Дорогу осилит идущий! Наберитесь знаний и опыта и тогда сможете продолжить начатое, если, конечно, будет на то желание.

Не выработалось умений и навыков, не все запомнилось? Беды в том нет! Зачетов и экзаменов по этим материалам не предвидится.

Конечно, пользы вам будет больше, если многие материалы вас заинтересовали, если вы глубже их проработали, если ими вы овладели в значительной мере. Однако в любом случае работа с предлагаемыми заданиями принесет вам пользу: школьные знания найдут применение, причем не в условиях принуждения, а под воздействием желания и интереса, и наоборот, работа с предложенными материалами поможет учебе. А главное — вы развивали творческое математическое мышление; получили некоторые умения и навыки исследовательской работы, увидели перспективы развития некоторых понятий, и это очень ценно!



Оглавление



ISBN 5-7107-7356-5
9 785710 773567

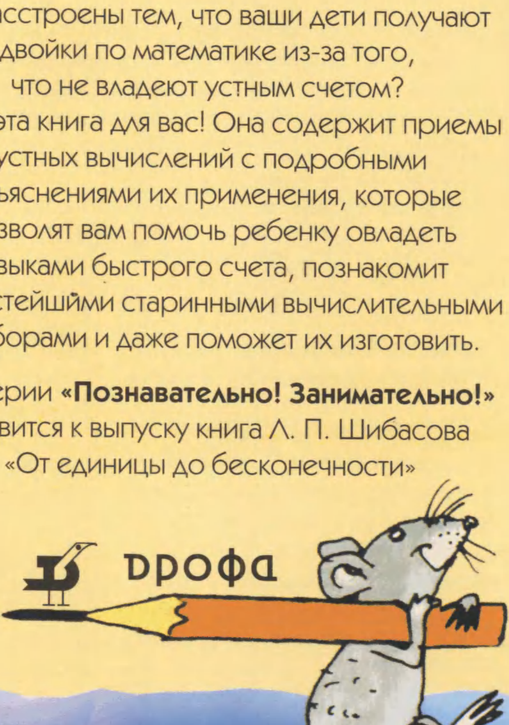
Дорогие ребята!

Вы хотите быстро и точно считать на уроке и в магазине? Тогда эта книга для вас! Она познакомит вас со способами и средствами вычислений, которые применяли ваши дедушки и бабушки, когда калькуляторов и в помине не было.

Уважаемые учителя и родители!

Вы расстроены тем, что ваши дети получают двойки по математике из-за того, что не владеют устным счетом? Тогда эта книга для вас! Она содержит приемы устных вычислений с подробными объяснениями их применения, которые позволят вам помочь ребенку овладеть навыками быстрого счета, познакомит с простейшими старинными вычислительными приборами и даже поможет их изготовить.

В серии **«Познавательно! Занимательно!»** готовится к выпуску книга Л. П. Шибасова «От единицы до бесконечности»



Дрофа

Познавательно! Занимательно!